Table des matières

1 Analyse

1.1 Révisions de première année

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel l. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n k u_k = l$.

Solution: On peut remarquer que c'est un résultat « de type Cesàro », le schéma de preuve pour cet exercice est d'ailleurs exactement le même que pour le théorème de Cesàro.
Notons E_n l'« écart » à l, défini par

$$\begin{aligned}
E_n &= \left| \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n k u_k - l \right| \\
&= \left| \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n k u_k - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n kl + \frac{l}{n} \right| \\
&\leq \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^n k|u_k - l| + \frac{|l|}{n}.
\end{aligned}$$

Le but est de montrer que E_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On se fixe $\varepsilon > 0$, et l'on fixe N tel que $|u_k - l| \leq \varepsilon$ si $k \geq N$. Pour $n \geq N$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
E_n &\leq \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N-1} k|u_k - l| + \frac{2}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k|u_k - l| + \frac{|l|}{n} \\
&\leq \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N-1} k|u_k - l| + \frac{|l|}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k\varepsilon \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N-1} k|u_k - l| + \frac{|l|}{n} + \varepsilon\frac{(n-N+1)(n+N)}{n^2} \\
&\leq \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N-1} k|u_k - l| + \frac{|l|}{n} + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais si n est assez grand, alors $\displaystyle\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N-1} k|u_k - l| + \frac{|l|}{n} \leq \varepsilon$ (en effet, dans le premier terme, la somme ne dépend pas de n), de sorte que pour n assez grand,

$$E_n \leq 3\varepsilon,$$

ce qui est suffisant pour conclure que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ku_k = l$. Les puristes pourront d'ailleurs s'amuser à choisir plus précisément les constantes de sorte que l'on obtienne la majoration $E_n \leq \varepsilon$ (au lieu de 3ε) à la fin.

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers respectivement l_u et l_v. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}$, converge vers $l_u l_v$.

Solution: Ici aussi, il s'agit d'une démonstration « de type Cesàro » qu'il faut faire proprement.
Donnons-nous M un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un tel M existe car ces deux suites sont convergentes, et en particulier $l_u \leq M$ et $l_v \leq M$. On note E_n l'« écart » de w_n à $l_u l_v$ défini par

$$\begin{aligned} E_n &= \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k} - l_u l_v \right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k v_{n-k} - l_u l_v|. \end{aligned}$$

Le but est de montrer que E_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on se fixe donc $\varepsilon > 0$. On peut trouver N tel que $|u_n - l_u| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_v| \leq \varepsilon$ si $n \geq N$. On remarque alors que si $n > 2N$ et $k \in \{N, N+1, \ldots, n-N\}$ alors

$$\begin{aligned} |u_k v_{n-k} - l_u l_v| &\leq |u_k v_{n-k} - u_k l_v| + |u_k l_v - l_u l_v| \\ &\leq M|v_{n-k} - l_v| + M|u_k - l_u| \\ &\leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Et comme pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \leq n$ on a $|u_k v_{n-k} - l_u l_v| \leq 2M^2$, on peut écrire, si $n > 2N$,

$$\begin{aligned} E_n &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k v_{n-k} - l_u l_v| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-N} |u_k v_{n-k} - l_u l_v| + \frac{1}{n}\sum_{k=n-N+1}^{n} |u_k v_{n-k} - l_u l_v| \\ &\leq \frac{2NM^2}{n} + 2M\varepsilon\frac{n-2N+1}{n} + \frac{2NM^2}{n} \\ &\leq \frac{4NM^2}{n} + 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Mais si n est assez grand, $\frac{2NM^2}{n} \leq \varepsilon$ de sorte que pour n assez grand,

$$E_n \leq (2M+1)\varepsilon,$$

ce qui est suffisant pour conclure. On pourra bien sûr couper de manière plus judicieuse les ε si l'on veut obtenir à la fin la majoration $E_n \leq \varepsilon$.

Exercice 3

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, notée x_n.

(b) Montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et donner sa limite.

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution:

(a) La fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$ et réalise donc une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur $]-\infty\,,+\infty[$, ce qui permet d'obtenir l'existence et l'unicité de $x_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En reprenant les notations de (a), si $n \in \mathbb{N}$ alors $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$ donc par stricte croissance de f, on voit que $x_{n+1} > x_n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si l'on suppose par l'absurde qu'elle converge vers un réel l, alors par continuité de f on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$ mais on sait par ailleurs que $f(x_n) = n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. En conclusion, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(c) La bonne façon de voir les choses est d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = n - \ln(x_n).$$

À partir de là, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, on voit que $\ln(x_n) = o(x_n)$, donc $x_n \sim n$, c'est-à-dire

$$x_n = n + o(n)\,.$$

Le plus dur est fait, il suffit ensuite de réinjecter et de dérouler les calculs :

$$\begin{aligned} x_n &= n - \ln(x_n) \\ &= n - \ln(n + o(n)) \\ &= n - \ln(n) - \ln(1 + o(1)) \\ &= n - \ln(n) + o(1)\,. \end{aligned}$$

Et on continue pour obtenir le développement à trois termes :

$$\begin{aligned} x_n &= n - \ln(x_n) \\ &= n - \ln(n - \ln(n) + o(1)) \\ &= n - \ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

Exercice 4

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution dans $]0\,,1[$, que l'on notera x_n.

(b) Donner la limite l de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

(c) Trouver un équivalent de $x_n - l$.

Solution:

(a) On note $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$, on vérifie facilement que la fonction f_n est strictement décroissante sur $]0\,,1[$, elle réalise donc une bijection de $]0\,,1[$ sur $]-n\,,1[$, donc $x_n = f_n^{-1}(0)$ est bien défini de manière unique.

(b) Si $n \geq 1$, on calcule $f_{n+1}(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 - x_n = -x_n < 0$, donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$, par stricte décroissance de f_{n+1}, on voit que $x_n > x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $l \in [0\,,1]$. Mais le terme x_n^n reste borné par 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, donc si $l \neq 0$ on aurait $f_n(x_n) \sim -nl$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui est une contradiction. En conséquence, $l = 0$.

(c) Comme $nx_n = 1 + x_n^n$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0, on peut écrire $nx_n = 1 + o(1)$, c'est-à-dire $nx_n \sim 1$ lorsque $n \to +\infty$. À partir de là, on en déduit facilement que lorsque $n \to +\infty$,

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et l'on note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

(a) En appliquant une formule de Taylor judicieusement choisie, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{2M_0}{h}$.

(b) En déduire que si l'on définit $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$, alors $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Solution:

(a) On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ et l'on applique la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| &\leq \frac{h^2}{2} \sup_{[x,x+h]} |f''| \\ &\leq \frac{h^2}{2} M_2. \end{aligned}$$

En utilisant de plus l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|hf'(x)| &\leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}M_2 \\ &\leq 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2,\end{aligned}$$

et il suffit de diviser par h pour obtenir le résultat souhaité.

(b) Comme h est arbitraire, il suffit de le choisir de telle sorte que $\dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{2M_0}{h}$ soit le plus petit possible, une étude de fonction indique que c'est pour $h = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ et que dans ce cas on obtient $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$. Mais x est arbitraire, c'est donc suffisant pour conclure.

Exercice 6

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note E l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives et Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

Déterminer $m = \inf\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et $M = \sup\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et éventuellement les fonctions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Solution: Pour l'infimum de Φ, on remarque que grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on peut écrire, pour $f \in E$,

$$\begin{aligned}b - a &= \int_a^b \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{f(t)}}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \sqrt{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}} \\ &= \sqrt{\Phi(f)}.\end{aligned}$$

Cela permet d'écrire directement que $\Phi(f) \geq (b-a)^2$, avec égalité si et seulement les fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ ont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda\dfrac{1}{\sqrt{f}}$, autrement dit $f = \lambda$. En d'autres termes, $m = (b-a)^2$ et l'infimum est atteint uniquement pour les fonctions constantes.

Pour le supremum, il n'y a pas de majoration évidente de $\Phi(f)$ par une quantité qui ne dépende pas de f. En fait, $M = +\infty$, et pour le prouver il suffit d'exhiber une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions de E telle que $\Phi(f_n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

La suite proposée ici n'est évidemment pas la seule possible. On se fixe $n \geq 1$. L'idée est de construire une fonction qui prenne à la fois des valeurs très grandes sur un intervalle de longueur non nulle (de façon à ce que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit grand) mais qui en même temps prenne la valeur 1 sur un intervalle de longueur non nulle (de sorte à ce que $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ ne soit pas trop petit). Plus précisément, on découpe l'intervalle $[a\,, b]$ en trois segments de longueurs égales, sur le segment de gauche on impose $f_n = n$, sur celui de droite $f_n = 1$, et sur celui du milieu on prend une fonction affine qui relie n à 1 (on laisse au lecteur le soin de faire un schéma). On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &\geq \int_{\text{segment de gauche}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\text{segment de gauche}} n\,\mathrm{d}t \\ &= n\frac{b-a}{3}\end{aligned}$$

et

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geq \int_{\text{segment de droite}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\text{segment de droite}} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{b-a}{3}.$$

Cela permet de voir que $\Phi(f_n) \geq n\dfrac{(b-a)^2}{9}$, ce qui est bien une quantité qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
Pour ceux qui trouvent cette construction obscure, on peut aussi se contenter des fonctions affines dont la pente augmente avec n, par exemple en définissant, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a\,,b]$, $f_n(x) = n(x-a)+1$. En effet, on peut faire le calcul et vérifier que, lorsque $n \to +\infty$, $\Phi(f_n) \sim \dfrac{(b-a)^2}{2}\ln(n)$. Le défaut de cette construction étant que l'on comprend moins « pourquoi ça marche ».

Exercice 7

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2015 de $x \mapsto \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2014} \frac{x^k}{k!}\right)$

Solution: Ici la bonne façon de voir les choses (ce que certains pourraient appeler « l'astuce ») est de remarquer que

$$\sum_{k=0}^{2014} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{2015}}{2015!} + o\big(x^{2015}\big)\,.$$

À partir de là, il suffit d'utiliser les propriétés de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{2014} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x - \frac{x^{2015}}{2015!} + o\big(x^{2015}\big)\right)\\ &= \ln\left(e^x\left(1 - \frac{x^{2015}}{2015!}e^{-x} + o\big(x^{2015}\big)\right)\right)\\ &= x + \ln\left(1 - \frac{x^{2015}}{2015!}(1+o(1)) + o\big(x^{2015}\big)\right)\\ &= x + \ln\left(1 - \frac{x^{2015}}{2015!} + o\big(x^{2015}\big)\right)\\ &= x - \frac{x^{2015}}{2015!} + o\big(x^{2015}\big)\,.\end{aligned}$$

1.2 Séries numériques, intégrales impropres

Exercice 8

Pour quelles valeurs de a et b la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^a)}{t^b}$ est elle intégrable sur $]0\,,+\infty[$?

Solution: La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^a)}{t^b}$ est continue sur $]0\,,+\infty[$, mais l'intégrabilité au voisinage de 0 et de $+\infty$ peut poser problème.
Au voisinage de 0. Si $a>0$, on voit que $f(t) \sim t^{a-b}$ donc l'intégrale de f est convergente si et seulement si $a-b>-1$. Au contraire si $a<0$ alors $f(t) \sim \dfrac{a\ln(t)}{t^b}$, donc l'intégrale de f est convergente si et seulement si $b<1$ (cf. le cours sur les intégrales de Bertrand).

Au voisinage de $+\infty$. Si $a>0$, alors $f(t) \sim \dfrac{a\ln(t)}{t^b}$, là encore le cours sur les intégrales de Bertrand informe qu'il y a convergence si et seulement si $b>1$. Si $a<0$, alors $f(t) \sim t^{a-b}$ donc la convergence a lieu si et seulement si $a-b<-1$.

Synthèse. Si $a > 0$, on doit donc avoir $1 < b < 1 + a$ et si $a < 0$ on doit avoir $1 + a < b < 1$. Dans le cas où $a = 0$, on peut vérifier que l'intégrale ne converge pas, soit au voisinage de 0 si $b \geq 1$, soit au voisinage de $+\infty$ si $b \leq 1$.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^a(x-1)^b}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit intégrable sur $]1\,,+\infty[$.

Solution: La fonction f est continue sur $]1\,,+\infty[$, mais l'intégrabilité au voisinage de 1 et de $+\infty$ peut poser problème.

Au voisinage de 0. On voit que $f(x) \sim \dfrac{1}{(x-1)^{b-1}}$, donc l'intégrale de f est convergente si et seulement si $b - 1 < 1$.

Au voisinage de $+\infty$. On voit que $f(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{x^{a+b}}$, le cours sur les intégrales de Bertrand informe qu'il y a convergence si et seulement si $a + b > 1$.

Synthèse. La condition nécessaire sur a et b est donc $b < 2$ et $a + b > 1$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ après en avoir justifié l'existence.

Solution: Notons $f_n : t \mapsto (\ln t)^n$, cette fonction étant continue sur $]0\,,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul obstacle possible à la convergence de l'intégrale se situe, lorsque $n \geq 1$, au voisinage de 0. Mais comme, au voisinage de 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\ln(t) = o\left(t^{-\frac{1}{2n}}\right)$, donc on voit que $f_n(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, ce qui est suffisant pour assurer la convergence de l'intégrale et donc la bonne définition de I_n.

Pour calculer I_n, on effectue une intégration par parties. On se fixe donc $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 (\ln t)^n \,\mathrm{d}t &= [t(\ln t)^n]_\varepsilon^1 - n\int_\varepsilon^1 (\ln t)^{n-1} \\ &= -\varepsilon(\ln\varepsilon)^n - n\int_\varepsilon^1 (\ln t)^{n-1},\end{aligned}$$

puis il suffit de faire tendre ε vers 0 pour que le premier terme du membre de droite tende vers 0, ce qui permet d'obtenir

$$I_n = -nI_n.$$

Une récurrence immédiate, couplée au fait que $I_0 = 0$, donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (-1)^n n!$.

Exercice 11

Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tels que $f'' \geq a$. Montrer que $(1 + |f|)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution: En intégrant deux fois de suite l'inégalité $f'' \geq a$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x) \geq f(0) + xf'(0) + \frac{ax^2}{2},$$

donc pour x assez grand, $1 + |f(x)| \geq \dfrac{ax^2}{3}$, ce qui s'écrit $\dfrac{1}{1+|f|} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, c'est suffisant pour prouver que $(1 + |f|)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. On note g la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On définit la fonction h par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)+1}.$$

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $x \geq x_0$ tel que $\displaystyle\int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que h n'est pas intégrable.

Solution:

(a) Puisque la fonction g est croissante, on voit que pour tout $t \in [x_0\,, x]$, on a $\dfrac{f(t)}{g(t)+1} \geq \dfrac{f(t)}{g(x)+1}$. En intégrant cette inégalité, et comme g est la primitive de f,

$$\int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)+1}.$$

Mais puisque la limite de g en $+\infty$ est $+\infty$, il est clair que le terme de droite tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$. Pour x assez grand, il aura dépassé $\dfrac{1}{2}$, et il en sera alors de même pour le terme de gauche.

(b) En itérant le processus, on peut trouver une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t &\geq \int_{x_0}^{x_n} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{n}{2},\end{aligned}$$

ce qui est suffisant pour conclure puisque n est arbitraire.

Remarque. Puisque g a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, on voit que $h = o(f)$. On vient donc de prouver que si f n'est pas intégrable, on peut construire une fonction h, négligeable par rapport à f, et qui pourtant n'est toujours pas intégrable.

Exercice 13

Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

Solution: La fonction $f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$ étant continue sur $\left[0\,, \frac{\pi}{2}\right[$, le seul obstacle possible à la convergence de l'intégrale se trouve au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Mais un développement limité (ou l'utilisation de l'identité $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \frac{1}{\tan(t)}$) montre qu'au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, ce qui suffit pour dire que la fonction f est intégrable au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et donc sur $\left[0\,, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 14

Montrer que $f : t \mapsto \cos(t^2)$ n'est pas intégrable mais que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Solution: La fonction f étant continue sur $[0\,, +\infty[$, le seul obstacle se situe au voisinage de $+\infty$. La première étape, en effectuant le changement de variables $u = t^2$, est de remarquer que

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

En effectuant ensuite une intégration par parties, on trouve alors

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^{x^2} + \int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{4u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sin(x^2)}{2x} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{4u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Lorsque $x \to +\infty$, le premier terme tend vers 0, le second ne dépend pas de x et le troisième tend vers une constante (en effet, puisque $\dfrac{\sin(u)}{4u^{\frac{3}{2}}} = O\left(\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$, cette fonction est intégrable). Cela montre que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Avec le même changement de variables, on voit aussi que

$$\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Or, en notant $I_n = [(2n-1/2)\pi\,,(2n+1/2)\pi]$, on voit que, si $u \in I_n$, $\cos(u) = |\cos(u)|$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_{I_n} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &\geq \int_{I_n} \frac{\cos(u)}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}}.\end{aligned}$$

Par positivité de $|f|$, on peut écrire, si $x^2 \geq (2N+1/2)\pi$, que

$$\begin{aligned}\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{x^2} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}},\end{aligned}$$

mais puisque $\dfrac{2}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$ lorsque $n \to +\infty$, la série de terme général $\dfrac{2}{\sqrt{(2n+1/2)\pi}}$ diverge, on peut donc minorer $\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ par une quantité qui peut être rendue aussi grande que voulue pourvu que x soit assez grand, ce qui montre que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0\,,+\infty[$.

Exercice 15

Étudier, en fonction de α, la convergence de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{\ln(n+1)}$.

Solution: Notons $u_n = \dfrac{n^\alpha}{\ln(n+1)}$ et $f : t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{\ln(1+t)}$. Si $\alpha > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc la série de terme général u_n diverge grossièrement. Si $\alpha \leq 0$, la fonction f est décroissante et positive donc on peut utiliser les comparaisons séries-intégrales : la série de terme général u_n converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[1\,,+\infty[$. Mais pour cette dernière, on pourra consulter son cours sur les intégrales de Bertrand pour se convaincre qu'elle est intégrable si et seulement si $\alpha < -1$.
En conclusion, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Exercice 16

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n^\alpha}$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Donner, en fonction de α, la nature de la série de terme général u_n.

(b) Calculer la somme de la série dans le cas $\alpha = 1$.

Solution:

(a) L'observation cruciale est que pour la plupart des entiers n, on a $E(\sqrt{n+1}) = E(\sqrt{n})$. En effet, on pourra se convaincre que c'est seulement si $n+1 = p^2$ (avec $p \in \mathbb{N}^\star$) que $E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n}) = p - (p-1) = 1$, dans tous les autres cas $E(\sqrt{n+1}) = E(\sqrt{n})$. À partir de là, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n^\alpha} = \sum_{p=2}^{E(\sqrt{N+1})} \frac{1}{(p^2-1)^\alpha}.$$

Mais comme $\frac{1}{(p^2-1)^\alpha} \sim \frac{1}{p^{2\alpha}}$ lorsque $p \to +\infty$, on voit que la série de droite converge si et seulement si $2\alpha > 1$, et il en est donc de même pour celle de gauche. En conclusion, la série de terme général $\frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

(b) Si $\alpha = 1$, au vu de (a), on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2-1}.$$

Mais puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2-1} &= \frac{1}{(p-1)(p+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right), \end{aligned}$$

on voit apparaître une somme téléscopique :

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2-1} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \dots\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 17

Discuter, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $\frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$.

Solution: Notons $u_n = \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$.

Si $\alpha \leq 0$ alors $u_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$ lorsque $n \to +\infty$ donc $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour n assez grand : la série de terme général u_n diverge.

Si $\alpha > 0$, alors on peut écrire le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha} &= (-1)^n n^{-\alpha}\left(1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right)^{-1} \\ &= (-1)^n n^{-\alpha}\left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - v_n \end{aligned}$$

avec $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}$. Le premier terme est le terme général d'une série convergente par le critère spécial des séries alternées, donc la série de terme général u_n converge si et seulement si celle de terme général v_n converge. Mais $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et l'on dispose d'un équivalent pour cette dernière, donc u_n converge si et seulement si la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}$ converge. Mais cela arrive (consulter son cours sur les intégrales de Bertrand) si et seulement si $2\alpha > 1$.

En conclusion, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 18

Étudier la convergence de la série de terme général $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Solution: On note $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ le terme général. Pour étudier la convergence de la série, on fait un développement asymptotique du terme général en prenant garde à passer à la l'exponentielle :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \\ &= \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right) - \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\left[\exp\left(\frac{\ln(1+1/n)}{n}\right) - 1\right] \\ &= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\left[\exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] \\ &= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\left[\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, le premier facteur du produit tend vers 1 et le second est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, de sorte que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. Par comparaison avec les séries de Riemann, la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Exercice 19

Discuter, en fonction de $\alpha > 0$ la convergence de la série de terme général $\left(n^\alpha \sin\left(n^{-\alpha}\right)\right)^{n^2}$.

Solution: On note $u_n = \left(n^\alpha \sin\left(n^{-\alpha}\right)\right)^{n^2}$. On essaye de faire un développement asymptotique, on prendra garde au fait qu'il faut à un moment ou à un autre passer à la forme exponentielle :

$$\begin{aligned} \left(n^\alpha \sin\left(n^{-\alpha}\right)\right)^{n^2} &= \left[n^\alpha\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right]^{n^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)^{n^2} \\ &= \exp\left[n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[n^2\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{6n^{2\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

À partir de là, si $2\alpha - 2 \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers une constante strictement positive donc la série de terme général u_n diverge grossièrement. Au contraire, si $2\alpha - 2 < 0$, alors

$$n^2 u_n = \exp\left[-\frac{n^{2-2\alpha}}{6} + 2\ln(n) + + o\left(n^{2-2\alpha}\right)\right],$$

donc la suite $(n^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0, en particulier $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série de terme général u_n converge. En conclusion, la série de terme général u_n converge si et seulement $\alpha < 1$.

Exercice 20

Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Solution: On note $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$, et l'on a envie d'utiliser le critère spécial des séries alternées. Pour cela, il faut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (c'est clair), décroissante, et converge vers 0.

Pour la décroissance, on peut écrire, si $t \neq 0$, que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{-n}}$. Mais si $m \geq n$ alors pour tout $t \in \left]0\,,1\right]$,

$\dfrac{1}{1+t^{-m}} \leq \dfrac{1}{1+t^{-n}}$. En intégrant cette inégalité sur $]0\,,1]$, on conclut à la décroissance du $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour la limite lorsque $n \to +\infty$, il ne faut pas chercher à calculer explicitement u_n. Au contraire, en majorant grossièrement le dénominateur,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

c'est suffisant pour conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

(a) Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \lambda\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ converge.

(b) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{n^\lambda}$.

(c) Donner la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{n!e^n}$.

Solution:

(a) On note $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \lambda\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. On effectue un développement asymptotique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

$$\begin{aligned}v_n &= \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \lambda\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, on voit que la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n v_k$, par (a) on sait que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel l. Or, on peut voir (la somme se télescope) que

$$\begin{aligned}S_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_1}\right) + \lambda\ln(n+1) \\ &= \ln\left((n+1)^\lambda\frac{u_{n+1}}{u_1}\right).\end{aligned}$$

On voit donc que la suite $\left((n+1)^\lambda u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers u_1e^l, ce qui veut bien dire que $u_n \sim \dfrac{c}{n^\lambda}$ lorsque $n \to +\infty$, avec $c = u_1e^l > 0$.

(c) On note $u_n = \dfrac{n^n}{n!e^n}$ et, pour se ramener au cadre de l'énoncé, on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(n+1)e} \times (n+1) \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \exp(-1) \exp\left[n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left[-1 + 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On est bien dans le cadre de l'énoncé avec $\lambda = \dfrac{1}{2}$. En conséquence, d'après (b), il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

Par comparaison avec les séries de Riemann, on voit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Remarque. On peut montrer, à l'aide d'outils plus avancés, que pour la question (c) on a $c = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, c'est-à-dire $n! \sim \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$ (c'est la formule dite de Stirling).

Exercice 22

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n - 2\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Solution:

(a) L'outil est ici la comparaison série-intégrale. En notant $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, puisque cette fonction est décroissante, si $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités (sauf la majoration pour $k = 1$ car f n'est pas intégrable au voisinage de 0), on obtient

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n \leq f(1) + \int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais on peut calculer une primitive de f, donc on obtient l'encadrement explicite suivant :

$$2\sqrt{n+1} - 1 \leq u_n 1+ \leq 2\sqrt{n} - 2,$$

ce qui se réécrit $u_n = 2\sqrt{n} + O(1)$, en particulier $u_n \sim 2\sqrt{n}$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) Notons $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$. Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on ne peut plus utiliser la comparaison série-intégrale : elle n'apporte pas assez d'information. On va plutôt prouver que $v_{n+1} - v_n$ est le terme général d'une série convergente, ce qui suffit pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, on trouve un majorant de $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left[\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} + + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est suffisant pour conclure à la converge de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$.

Exercice 23

Pour $n \geq 2$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

(a) Donner un équivalent de $(u_n)_{n\geq 2}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n - \ln(\ln(n)))_{n\geq 2}$ converge.

Solution:

(a) L'outil est ici la comparaison série-intégrale. En notant $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$, puisque cette fonction est décroissante, si $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités (sauf la majoration pour $k = 2$ car f n'est pas intégrable au voisinage de 1), on obtient

$$\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \int_2^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais on peut calculer une primitive de f ($t \mapsto \ln(\ln(t))$ convient par exemple), donc on obtient l'encadrement explicite suivant :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq u_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)),$$

ce qui se réécrit $u_n = \ln(\ln(n)) + O(1)$, en particulier $u_n \sim \ln(\ln(n))$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) Notons $v_n = u_n - \ln(\ln(n))$. Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on ne peut plus utiliser la comparaison série-intégrale : elle n'apporte pas assez d'information. On va plutôt prouver que $v_n - v_{n-1}$ est le terme général d'une série convergente, ce qui suffit pour montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge. Pour cela, on calcule un majorant de $v_n - v_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{n\ln(n)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(n-1)) \\
&= \frac{1}{n\ln(n)} + \ln\left(\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}\right) \\
&= \frac{1}{n\ln(n)} + \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\
&= \frac{1}{n\ln(n)} + \ln\left(1 - \frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)
\end{aligned}$$

ce qui est suffisant pour conclure à la converge de la série de terme général $v_n - v_{n-1}$.

1.3 Suites et séries de fonctions, intégrales à paramètres

Exercice 24

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Solution: Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto f(t^n)$. La première étape d'étudier la convergence simple : on vérifie que f_n converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0\,,1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

La fonction g est continue par morceaux, pour appliquer le théorème de convergence dominée il faut vérifier que l'hypothèse de domination est satisfaite. Or, en notant M un majorant de $|f|$ (un tel majorant existe car f est continue sur le segment $[0\,,1]$), on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,,1]$, $f_n(t) \leq \varphi(t)$, où φ est la fonction constante et égale à M. Cette fonction φ est intégrable sur $[0\,,1]$, donc on peut passer à la limite sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(0).\end{aligned}$$

Exercice 25

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution: Il faut partir du membre de droite et exprimer $f(t) = t^{-t}$ comme une série de fonctions. En effet,

$$\begin{aligned} t^{-t} &= e^{-t\ln(t)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t\ln(t))^n}{n!}, \end{aligned}$$

on note donc $f_n(t) = \dfrac{(-t\ln(t))^n}{n!}$, et l'on sait que la série de terme général f_n converge simplement vers f. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$, on introduit la quantité $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^1 t^n(\ln(t))^m\,\mathrm{d}t$, et l'on remarque, à l'aide d'une intégration par parties, si $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln(t))^m\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{mt^n}{n+1}(\ln(t))^{m-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}. \end{aligned}$$

À partir de là, une récurrence immédiate montre que $I_{n,m} = (-1)^m \dfrac{m!}{(n+1)^m} I_{n,0} = (-1)^m \dfrac{m!}{(n+1)^{m+1}}$. Mais comme $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Or il se trouve que les f_n sont à valeurs positives donc $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Mais la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ est convergente puisque $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

lorsque $n \to +\infty$. En conclusion,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.\end{aligned}$$

Exercice 26

En calculant $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ de deux manières différentes, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\ln(2)$.

Solution: On note $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$. Un développement limité au voisinage de 0 informe que l'on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$, de sorte que f est continue sur $[0\,,1[$. De plus, $f(1-h) \sim \ln(h) = o\left(\sqrt{h}\right)$ lorsque $h \to 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini. Mais on peut écrire ln comme somme d'une série, plus précisément, pour $t \in [0\,,1[$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^{2(n-1)}}{n}.$$

On définit naturellement $f_n(t) = -\dfrac{t^{2(n-1)}}{n}$ et l'on sait que la série de terme général f_n converge simplement vers f (sauf en 1 mais cela ne change pas la valeur des intégrales). On calcule facilement

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n(2n-1)},$$

et puisque f_n est à valeurs négatives, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2}$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui garantit que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente. On peut donc écrire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

Mais on peut calculer le membre de gauche explicitement ! En effet, si l'on effectue une intégration par parties, en prenant garde à intégrer sur $[\varepsilon\,,1-\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{2t}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\ln(1-t)+\ln(1+t)}{t}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} + [\ln(1-t) - \ln(1+t)]_\varepsilon^{1-\varepsilon} \\ &= \left[\frac{\ln(1-t)(1-t)}{t}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \left[\frac{\ln(1+t)(1+t)}{t}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Puis, en s'aidant du fait que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0$, on obtient, en faisant tendre ε vers 0,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= (0-1) - (2\ln(2) - 1) \\ &= -2\ln(2),\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir le résultat souhaité.

Exercice 27

(a) Vérifier (après avoir justifié l'existence des intégrales) que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$. On pourra supposer connue l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution:

(a) On note $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ et $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ et l'on vérifie, à l'aide d'un développement limité, que f et g sont continues sur respectivement $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (avec $f(0) = -1$ et $g(1) = -1$), ce qui montrent que les intégrales sont bien définies. Le changement de variables $t \to 1-t$ permet d'obtenir l'identité

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) On sait que l'on peut écrire

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^{n-1}}{n}$$

et

$$\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t),$$

ce qui invite à définir $f_n : t \mapsto -\dfrac{t^{n-1}}{n}$ et $g_n : t \mapsto t^n \ln(t)$, de sorte que la série de terme général f_n, respectivement g_n, converge simplement vers f, respectivement g. On calcule

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2^n n^2},$$

et, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(2)}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Comme les f_n et les g_n sont à valeurs négatives, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de sorte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\ln(2)}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

Mais dans la dernière somme, les trois termes son individuellement sommables, donc on peut « casser » la somme en trois et faire passer le terme du milieu à gauche pour obtenir

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{2^n(n)} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{2^n(n)}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'identité $\ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$ et de diviser par 2.

Exercice 28

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}_+^\star$ une application continue à valeurs strictement positives. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^\alpha \,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(0)$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}$.

Solution:

(a) On note $g(t,\alpha) = f(t)^\alpha = e^{\alpha \ln(f(t))}$. On se fixe $A > 0$ et on va montrer que F est de classe C^1 sur $[0\,,A]$. Pour cela, on remarque que

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(t,\alpha) = \ln(f(t)) e^{\alpha \ln(f(t))}.$$

En notant M un majorant de la fonction $|\ln(f)|$ sur $[0\,,1]$ (la fonction $\ln(f)$ est bien définie et continue puisque f est continue et strictement positive, donc elle est bornée sur le segment $[0\,,1]$), on a, pour tout $\alpha \in [0\,,A]$ et tout $t \in [0\,,1]$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \alpha}(t,\alpha) \leq \varphi(t)\right|,$$

où φ est la fonction constante et égale à Me^{AM}, en particulier elle est intégrable sur $[0\,,1]$. Comme de plus les hypothèses de continuité et dérivabilité de la fonction g sont satisfaites, on peut dériver sous le signe intégrale, c'est-à-dire que F est dérivable sur $[0\,,A]$ et

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \ln(f(t)) e^{\alpha \ln(f(t))} \,\mathrm{d}t.$$

Comme de plus A est arbitraire, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et en particulier

$$F'(0) = \int_0^1 \ln(f(t)) \,\mathrm{d}t.$$

(b) On cherche $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} (F(\alpha))^{1/\alpha}$. Mais comme $F(0) = 1$ et que F est dérivable en 0, lorsque $\alpha \to 0$,

$$F(\alpha) = 1 + \alpha F'(0) + o(\alpha)\,.$$

En injectant dans l'expression qui nous intéresse, lorsque $\alpha \to 0^+$,

$$\begin{aligned} (F(\alpha))^{1/\alpha} &= (1 + \alpha F'(0) + o(\alpha))^{1/\alpha} \\ &= \exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln(1 + \alpha F'(0) + o(\alpha))\right) \\ &= \exp\left(F'(0) + o(1)\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) \,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 29

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Calculer f.

Solution:

(a) On note $g : (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t}$. On remarque que si l'on se fixe $x \in \mathbb{R}$, alors $g(x, \bullet)$ se prolonge par continuité en 0 (et $g(x,0) = \dfrac{x^2}{2}$), et $g(x,t) = O(e^{-t})$ lorsque $x \to +\infty$ de sorte que $g(x,\bullet)$ est intégrable sur $[0\,,+\infty[$: le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

(b) Fixons nous $A > 0$ et montrons que f est de classe C^2 sur $[-A\,,A]$. Pour cela, on remarque que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \cos(tx) e^{-t}$$

de sorte que, pour tout $x \in [-A\,,A]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \psi(t)$ où $\varphi(t) = Ae^{-t}$ et $\psi(t) = e^{-t}$ sont des fonctions intégrables sur $[0\,,+\infty[$. Comme A est arbitraire, cela montre que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et en particulier

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos(tx)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \sin(tx) e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= 1 - \left[-x\sin(tx)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x^2 \cos(tx) e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= 1 - x^2 f''(x). \end{aligned}$$

Cela conduit à $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $f'(x) = \arctan(x)$ (on vérifie en effet que $f'(0) = 0$). Mais une intégration par parties, puisque $f(0) = 0$, conduit à

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \arctan(t) \, \mathrm{d}t \\ &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 30

On définit, pour x positif, $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.

(a) Déterminer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.

(b) Monter que f et g sont dérivables et que $g' = -f'$.

(c) En déduire f en fonction de g puis la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

Solution:

(a) Pour calculer $g(0)$, il suffit de connaître une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$: il s'agit de la fonction arctan. On a alors

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pour la limite de g en $+\infty$, il faut utiliser le théorème de convergence dominée. Plus précisément, on note

$$h(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2},$$

de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 h(x,t)\,\mathrm{d}t$. Or il est clair que lorsque $x \to +\infty$, la fonction $g(x,t)$ tend vers 0. Comme de plus on a la domination

$$\forall x \geq 0, \forall t \in [0\,,1],\ |h(x,t)| \leq \underbrace{1}_{\text{intégrable sur } [0,1]},$$

on peut bien passer à la limite sous le signe somme et obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} g(x) &= \int_0^1 0 \times \mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Pour dériver g, on utilise le fait que la fonction h est de classe C^1 et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

En particulier, si on restreint x à un segment $[0\,,A]$, alors on a la domination suivante

$$\forall x \in [0\,,A], \forall t \in [0\,,1],\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \underbrace{2A}_{\text{intégrable sur } [0,1]}.$$

Cela permet de dériver sous le signe somme, c'est-à-dire que pour tout $x \in [0\,,A]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variables $u = xt$. Mais A est arbitraire, de sorte que g est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, avec $g'(x) = -2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Quant à f, ce n'est pas une intégrale à paramètres, le calcul de sa dérivée se fait plus facilement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ainsi on voit que l'on a bien $f' = -g'$.

(c) En intégrant l'équation trouvée dans (b), on voit qu'il existe une constante c telle que $f = c - g$. Mais comme on voit de plus que $f(0) = 0$, alors nécessairement $c = g(0) = \frac{\pi}{4}$. On a donc la relation fonctionnelle

$$f = \frac{\pi}{4} - g.$$

Il reste alors à prendre la limite $x \to +\infty$ pour voir que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

En prenant la racine carré de part et d'autre, on voit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 31

Soit f_n la suite de fonctions définie par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution: On commence par se fixer $x_0 \in \mathbb{R}$ et l'on étudie la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, elle vérifie la relation de récurrence $x_{n+1} = \sin(x_n)$. La première observation est que $x_1 \in [-1\,,1] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Si $x_1 \geq 0$, comme $0 \leq \sin(x) \leq x$ si $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on voit que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante minorée, elle converge vers une limite l. Par continuité de sin, on voit que $\sin(l) = l$ et comme de plus $l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $l = 0$. Si $x_1 < 0$, il suffit de considérer $(-x_n)_{n\geq 1}$ pour se ramener au cas précédent. En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

Pour la convergence uniforme, l'observation cruciale, déjà faite dans l'étude de la convergence simple, est que, pour $n \geq 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \leq x_n,$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$, c'est-à-dire $x_n = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Comme cette suite tend vers 0, on en déduit que la convergence vers 0 est uniforme.

Exercice 32

Discuter de la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

Solution: Si on se donne $x > 0$, il est clair que $f_n(x) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme de plus $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

Pour la convergence uniforme, il faut calculer l'écart entre f_n et sa limite, à savoir 0, c'est-à-dire que la quantité à étudier est $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n|$. Pour la calculer, il faut faire une étude de fonction : il est clair que

$$f_n'(x) = ne^{-nx}\left[\cos(nx) - \sin(nx)\right],$$

en particulier le premier zéro positif de f_n' se situe en $\frac{\pi}{4n}$. Comme

$$f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

ne tend manifestement pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 33

Discuter de la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)\cos^n(x)$.

Solution: On note $f_n : x \mapsto \sin(x)\cos^n(x)$, et $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$. Il est clair, que si $\cos(x) \neq 1$ alors

$$S_N(x) = \sin(x)\frac{1-\cos^{N+1}(x)}{1-\cos(x)},$$

et que si $\cos(x) = 1$ alors $\sin(x) = 0$ donc $S_N(x) = 0$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que S_N converge simplement vers la fonction S définie par

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est plus facile de commencer par vérifier la convergence normale (puisqu'elle implique la convergence uniforme). Pour cela, il faut calculer $\sup |f_n|$. Or, comme

$$\begin{aligned} f_n' &= \cos^{n+1} - n\cos^{n-1}\sin^2 \\ &= \cos^{n+1} - n\cos^{n-1}(1-\cos^2) \\ &= (n+1)\cos^{n+1} - n\cos^{n-1}, \end{aligned}$$

on voit que $f_n'(x)$ est nul soit quand $\cos(x) = 0$ (mais dans ce cas $f_n(x) = 0$), soit quand $\cos^2(x) = \dfrac{n}{n+1}$ mais dans ce cas

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \sqrt{1-\cos(x)^2}\cos^n(x) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n/2} \\ &\sim \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$. En conséquence, par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum_n \sup |f_n|$ diverge : la série de fonctions ne converge pas normalement.

Comme les fonctions f_n (et donc les S_N) sont continues, pour montrer que la convergence ne peut être uniforme il suffit de montrer que S n'est pas continue. Or, au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x$ et $1-\cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ donc

$$\begin{aligned} S(x) &\sim \frac{x}{\frac{x^2}{2}} \\ &\sim \frac{2}{x}, \end{aligned}$$

ce qui est manifestement incompatible avec $S(0) = 0$.

Exercice 34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f'' soit bornée. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(x) = n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Solution: Il est clair que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers f' : cela découle de la définition même de la dérivée. Pour ce qui est de la convergence uniforme, le mieux est d'utiliser la majoration de Taylor-Lagrange : si on note M un majorant de $|f''|$ sur $\mathbb{R}$, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| f\left(x+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} f'(x) - f(x) \right| &\leq \frac{1}{2n^2} \sup_{[x,x+1/n]} |f''| \\ &\leq \frac{M}{2n^2}. \end{aligned}$$

En multipliant cette inégalité par n, on trouve

$$|f_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{2n},$$

le terme de droite est indépendant de x et tend vers 0 quand $n \to +\infty$ ce qui est suffisant pour conclure à la convergence uniforme.

Exercice 35

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x^2}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(c) Montrer que $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$ au voisinage de 0. On pourra supposer connue l'identité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution:

(a) On définit naturellement f_n par $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$, les fonctions f_n sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, si on se fixe $a > 0$, il est clair que $\displaystyle\sup_{[a,+\infty[} |f_n| = e^{-n^2a^2}$, en particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{[a,+\infty[} |f_n| < +\infty.$$

Cela signifie que la convergence est normale sur $[a\,,+\infty[$, donc la fonction $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est bien définie et continue sur cet intervalle. Comma $a > 0$ est arbitraire, f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Comme de plus f est évidemment paire, elle est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.

(b) Il s'agit d'utiliser le théorème d'interversion des limites : il est clair que

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et puisque la convergence de la série de fonctions f_n est normale sur $]1\,,+\infty]$, on est bien en droit d'intervertir les limites de sorte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(c) L'outil clé est ici la comparaison série-intégrale. Le théorème d'interversion des limites ne convient pas car f diverge au voisinage de 0. Plus précisément, à x fixé, par décroissance des f_n,

$$\int_n^{n+1} e^{-t^2x^2}\, \mathrm{d}t \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} e^{-t^2x^2}\, \mathrm{d}t.$$

En sommant pour n allant de 0 à $+\infty$ (sauf pour le membre de droite où on traite à part le cas $n = 0$), on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, \mathrm{d}t \leq f(t) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, \mathrm{d}t.$$

En introduisant le changement de variables $u = tx$, on voit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2x}. \end{aligned}$$

Et en utilisant l'encadrement précédent on peut conclure.

Exercice 36

On note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

(a) Quel est le domaine de définition de S ?

(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de S sur son domaine de définition.

(c) Donner un équivalent de S au voisinage de 1.

Solution: On note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

(a) Si $|x| < 1$, alors il est clair que $f_n(x) = O(|x|^n)$, et donc la série de terme général $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge : $S(x)$ est bien défini. Au contraire, si $|x| > 1$, alors la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une constante 1 et donc $S(x)$ n'est pas défini. Enfin, il est clair que S n'est définie ni en 1, ni en -1 (en -1 les f_n ne sont même pas toutes définies). En conclusion, le domaine de définition de S est $]-1\,,1[$.

(b) On se fixe un réel positif $a < 1$. Sur $[-a\,,a]$, il est clair que $|f_n| \leq a^n$. Cela signifie que la convergence est normale, comme de plus les f_n sont continues, on en déduit que S est continue sur $[-a\,,a]$. De plus, toujours sur $[-a\,,a]$, les f_n sont de classe C^1. Puisque

$$f_n' = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} - \frac{nx^{2n}}{(1+x^n)^2},$$

on voit que $\sup\limits_{[-a,a]} |f_n'| \leq na^{n-1} + na^{2n}$: on est encore en présence du terme général d'une série convergente, donc la convergence de la série $\sum f_n'$ est normale. En conséquence, la fonction S est de classe C^1 sur $[-a\,,a]$. Mais comme $a < 1$ est arbitraire, on en déduit que S est de classe C^1 sur $]-1\,,1[$.

(c) La clé est ici la comparaison série-intégrale. En effet, il est clair, par décroissance (lorsque $x < 1$) de la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{1+x^t}$, que

$$\int_n^{n+1} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t + O(1)\,.$$

Il reste à calculer l'intégrale dans le membre de droite, pour cela on effectue les changements de variables $u = t\ln(x)$ puis $v = e^u$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{t\ln(x)}}{1+e^{t\ln(x)}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\ln(x)} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^u}{1+e^u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{1}{1+v}\,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{\ln(x)} \left[\ln(1+v)\right]_0^1 \\
&= -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, compte tenu du développement limité de ln au voisinage de 1, lorsque $x \to 1$,

$$S(x) \sim \frac{\ln(2)}{1-x}.$$

Exercice 37

Calculer le rayon de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{\sinh(n)}{\cosh(n)^2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha^{n!}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{2n} = 2^n \\ a_{2n+1} = 3^n \end{cases}$.

Solution:

(a) Il faut calculer un équivalent de a_n. Comme $\sinh(n) \sim \dfrac{e^n}{2}$ et $\cosh(n) \sim \dfrac{e^n}{2}$, il est clair que

$$a_n \sim 2e^{-n}$$

lorsque $n \to +\infty$. À partir de là, en appliquant par exemple la règle de d'Alembert, il est clair que la rayon de convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est e.

(b) Si $\alpha \neq 0$ (dans le cas contraire l'exercice est trivial), alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais, et on peut appliquer le critère de d'Alembert : comme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha^{(n+1)!-n!}$$

et que $(n+1)! - n! = nn!$ tend vers $+\infty$ si $n \to +\infty$, le rayon de convergence de la série est

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } |\alpha| < 1 \\ 1 & \text{si } |\alpha| = 1 \\ 0 & \text{si } |\alpha| > 1 \end{cases}.$$

(c) Il faut ici revenir à la définition du rayon de convergence. On se donne $\rho > 0$ et on veut savoir si la suite $(\rho^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cela est équivalent à ce que les suites $(\rho^{2n}2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^{2n+1}3^n)$ soient bornées, c'est-à-dire à ce que $2\rho^2 \leq 1$ et $3\rho^2 < 1$. En conclusion, la suite $(\rho^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\rho \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 38

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n^2 x^n$?

(b) Quel est celui de $\sum a_n x^{2n}$?

(c) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^{n^2}$ est supérieur ou égal à 1.

Solution:

(a) Il faut revenir à la définition : on note

$$I = \{\rho > 0 \text{ tels que } (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

et

$$I' = \{\rho > 0 \text{ tels que } (a_n^2\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

On alors $R = \sup I$ et le rayon R' de convergence de la série $\sum a_n^2 x^n$ vaut $R' = \sup I'$. Comme on a l'équivalence

$$\begin{aligned} (a_n^2\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } &\Leftrightarrow \left((a_n\sqrt{\rho}^n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow (a_n\sqrt{\rho}^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée,} \end{aligned}$$

il est clair que $I = \{\sqrt{\rho'};\ \rho' \in I'\}$. On en tire, en passant au sup, que $R = \sqrt{R'}$, c'est-à-dire $R' = R^2$.

(b) On effectue le même genre de raisonnement que pour (a) : si on se donne $\rho > 0$,

$$(a_n\rho^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \Leftrightarrow \left(a_n(\rho^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Donc, en notant R' le rayon de convergence de $\sum a_n x^{2n}$, et en raisonnant de la même façon qu'en (a), on voit que $(R')^2 = R$, c'est-à-dire $R' = \sqrt{R}$.

(c) Il suffit de montrer que pour tout $0 < \rho < 1$, la suite $(a_n \rho^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais puisqu'il existe $C \geq 0$ tel que $|a_n| \leq CR^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$|a_n \rho^{n^2}| \leq C\frac{\rho^{n^2}}{R^n}.$$

Or, si $\rho \in [0\,,1[$, il est facile de voir que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 grâce au critère de d'Alembert, et c'est donc suffisant pour conclure.

Exercice 39

Donner le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$.

Solution: L'outil clé est la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right).$$

Le DSE du premier terme du membre de droite est censé être connu, quant au deuxième on se ramène à un DSE connu :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k}.\end{aligned}$$

En remettant ensemble tous les morceaux, on en déduit que

$$\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left((-1)^k + \frac{1}{2^{k+1}}\right) x^k.$$

On pourra d'ailleurs remarquer que le rayon de convergence est 1.

Exercice 40

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(2-3x+x^2)$.

Solution: L'observation judicieuse à faire (ce que certains appellent l'astuce) est que $2-3x+x^2 = (2-x)(1-x)$. À partir de là, on peut se ramener au développement (bien connu ?) de ln :

$$\begin{aligned}\ln(2-3x+x^2) &= \ln(2-x) + \ln(1-x) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln(1-x) \\ &= \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

On peut d'ailleurs remarquer que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

Exercice 41

Calculer le rayon de convergence, puis le domaine de convergence $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Calculer la somme dans la série lorsque $x \geq 0$.

Solution: Pour ce qui est du rayon de convergence, le critère de d'Alembert permet de voir qu'il est égal à 1. En $x = 1$, par comparaison avec les séries de Riemann la somme diverge, tandis qu'en $x = -1$ on est en présence d'une série alternée donc la somme converge. En conclusion, le rayon de convergence est 1 et le domaine de convergence est $[-1\,,1[$.

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Pour se ramener à une série connue, on peut remarquer que

$$xf(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or, dans le membre de droite, on reconnaît la primitive d'une série entière connue :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\ &= \operatorname{arctanh}(x).\end{aligned}$$

On en déduit alors que pour $x \in [0\,,1[$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctanh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 42

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k u_{n-1-k}$. On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et l'on admet que le rayon R de convergence de f est strictement positif.

(a) Montrer que $f(x) = 1 + xf^2(x)$ pour tout $x \in \,]-R\,,R[$.

(b) En déduire f, puis une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

(a) On se donne $x \in \,]-R\,,R[$. Il faut multiplier chaque membre de la relation de la récurrence par x^n puis les sommer pour $n \in \mathbb{N}^\star$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k u_{n-1-k} \right) x^n \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} u_k u_{m-k} \right) x^{m+1} \\ &= x \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} u_k u_{m-k} \right) x^m,\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variables $m = n-1$. Dans le membre de droite, on reconnait dans $\sum_{k=0}^{m} u_k u_{m-k}$ le produit de Cauchy de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même, donc le membre de droite vaut $xf(x)^2$. Quant au membre de gauche, il est clair qu'il vaut $f(x) - u_0 = f(x) - 1$. Et toutes les opérations que l'on a effectuées sont bien licites si $|x| < R$.

(b) À $x \in \,]-R\,,R[$ fixé, $f(x)$ est solution d'une équation du second degré ! On en déduit que

$$f(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x},$$

où *a priori* ε est une fonction dépendant de x et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Mais comme f est continue, ε l'est aussi donc elle est constante. De plus, comme f est continue en 0, on ne peut avoir $\varepsilon = 1$ (sinon f divergerait en 0) et donc nécessairement $\varepsilon(x) = -1$ pour tout $x \in \,]-R\,,R[$, en conclusion

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Il faut maintenant développer f en série entière au voisinage de 0. Pour cela, on utilise le développement au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1-t}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t} &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2!}t^2 + \ldots + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \ldots \times \left(-\frac{2k-3}{2}\right) \times \frac{1}{k!} \times (-t)^k + \ldots \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-3)}{2^k k!} t^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(1 \times 2 \times 4 \ldots \times 2k) \times (2k-1) \times 2^k k!} t^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2k-1)4^k (k!)^2} t^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} \frac{t^k}{(2k-1)4^k}.
\end{aligned}$$

À partir de là, le développement en série entière de f suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} \frac{(4x)^k}{(2k-1)4^k}}{2x} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k-2} \binom{2k}{k} x^{k-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+2} \binom{2n+2}{n+1} x^n.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients du développement en série entière, on en déduit

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{4n+2} \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(2n+1)} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

Et l'on peut vérifier, directement à partir de l'expression de f, que le rayon de convergence de f est $\frac{1}{4}$.

Exercice 43

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq n!$.

(b) Montrer que si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ alors $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = e^x f(x)$.

(c) En déduire f, puis que $u_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Solution:

(a) On procède par récurrence forte : il est clair que $|u_0| \leq 0!$ et si $|u_k| \leq k!$ pour tout $k \leq n$ alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |u_k| \\ &\leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leq (n+1)!, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que somme contient $n+1$ termes tous plus petits que 1.

(b) Par (a) on sait que $\left|\frac{u_n}{n!}\right| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que le rayon de convergence de f est plus grand que 1. En conséquence, f est bien définie sur $]-1\,,1[$. De plus, à l'intérieur du domaine de convergence on peut dériver terme à terme donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Or l'on reconnaît dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$ le produit de Cauchy de la suite $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (terme général de la série entière f) et de la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (terme général de la série entière exp) de sorte que l'on a bien, pour $x \in]-1\,,1[$,

$$f'(x) = e^x f(x).$$

(c) L'équation différentielle vérifie par f est linéaire du premier ordre : comme exp est la primitive de exp, sa solution est de la forme $f(x) = C\exp(\exp(x))$. Comme de plus $f(0) = u_0 = 1$, on voit que $C = e^{-1}$, c'est-à-dire

$$f : x \mapsto e^{-1} e^{e^x}.$$

Pour retrouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,il faut s'aider du fait que $u_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais il ne faut pas dériver brutalement. Au contraire, on développe une première fois exp en série entière pour écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{e^{kx}}{k!}.$$

C'est-à-dire, en notant $f_k : x \mapsto e^{-1}\dfrac{e^{kx}}{k!}$, que $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. Or on peut vérifier que sur $]-1\,,1[$, cette série de fonctions, ainsi que la série de fonctions des dérivées n-ièmes pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ converge normalement, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^{(n)}.$$

Mais il est clair que $f_k^{(n)}(0) = \dfrac{k^n e^{-1}}{n!}$ donc en évaluant $f^{(n)}$ en 0 on obtient bien

$$u_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

1.4 Équations différentielles

Exercice 44

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| = 1$. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f = e^{i\alpha}$.

On pourra raisonner par analyse-synthèse en calculant, si une telle fonction α existe, la valeur de sa dérivée.

Solution: *Analyse.* Supposons que $f = e^{i\alpha}$. En dérivant, on voit qu'alors

$$\begin{aligned} f' &= i\alpha' e^{i\alpha} \\ &= i\alpha' f. \end{aligned}$$

Comme f ne s'annule pas on peut inverser la formule précédente pour obtenir

$$\alpha' = \frac{f'}{if}.$$

Synthèse. On sait quelle est la valeur de la dérivée de α, pour connaître entièrement α il faudrait de plus avoir sa valeur en un seul point, mais ce n'est pas très difficile : comme $|f(0)| = 1$, il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = e^{i\alpha_0}$. On définit alors la fonction α par $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \frac{f'(s)}{if(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Il reste à vérifier que cela définit bien une fonction à valeurs réelles. On calcule donc la partie imaginaire de l'intégrande :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(\frac{f'(s)}{if(s)}\right) &= -\mathrm{Re}\left(\frac{f'(s)}{f(s)}\right) \\ &= -\mathrm{Re}\left(\frac{f'(s)\overline{f(s)}}{|f(s)|^2}\right) \\ &= -\mathrm{Re}(f'(s)\overline{f(s)}). \end{aligned}$$

Mais comme on sait par ailleurs que la fonction $|f|^2$ est constante donc de dérivée nulle, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}|f|^2}{\mathrm{d}s}(s) \\ &= f'(s)\overline{f(s)} + \overline{f'(s)}f(s) \\ &= 2\mathrm{Re}(f'(s)\overline{f(s)}). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut bien dire que α est une fonction à valeurs réelles. Pour montrer que f et $e^{i\alpha}$ coïncident on considère la fonction $g = fe^{-i\alpha}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} g' &= f'e^{-i\alpha} - if\alpha' e^{-i\alpha} \\ &= f'e^{-i\alpha} - f\frac{f'}{f}e^{-i\alpha} \\ &= f'e^{-i\alpha} - f'e^{-i\alpha} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction g est donc constante, or $g(0) = 1$ par construction de α_0 donc $g = 1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui veut exactement dire que $f = e^{i\alpha}$.

Exercice 45

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si M est un point de la courbe représentative de f et T la tangente à cette courbe en M, alors O est le milieu du segment ayant pour extrémité l'intersection de T avec (Ox) et le projeté de M sur (Ox).

Solution: En un point $(a, f(a))$ de la courbe représentative de f, la tangente a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

elle intersecte donc l'axe des abscisses en le point d'abscisse $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. Et il faut que ce point soit le symétrique par rapport à O du point $(a,0)$, c'est-à-dire que l'on doit avoir l'équation

$$-a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$f'(a) = \frac{f(a)}{2a}.$$

Or il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, qui se résout facilement : on trouve que l'ensemble des solutions est

$$\left\{a \mapsto \lambda\sqrt{a};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 46

Soient a et b deux réels non nuls fixés. Résoudre

$$\begin{cases} x' = \cosh(a)x + b\sinh(a)y \\ y' = \dfrac{\sinh(a)}{b}x + \cosh(a)y \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnues x et y.

Solution: C'est un système de la forme $X' = AX$, avec

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(a) & b\sinh(a) \\ \dfrac{\sinh(a)}{b} & \cosh(a) \end{pmatrix}.$$

Il n'y a ici pas de secret, il faut diagonaliser la matrice A ! Pour cela on calcule son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - \cosh(a) & -b\sinh(a) \\ -\dfrac{\sinh(a)}{b} & \lambda - \cosh(a) \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\cosh(a)\lambda + \cosh(a)^2 - \sinh(a)^2 \\ &= \lambda^2 - (e^a + e^{-a})\lambda + 1. \end{aligned}$$

Avec les relations coefficients-racines, on voit directement que les racines de χ_A sont $\lambda_1 = e^{-a}$ et $\lambda_2 = e^{-a}$. La matrice A possède deux valeurs propres distinctes et est d'ordre 2 donc est diagonalisable ! Pour trouver E_{λ_1}, on résout l'équation $AX = \lambda_1 X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} -\sinh(a)u + b\sinh(a)v &= 0 \\ \dfrac{\sinh(a)}{b}u - \sinh(a) &= 0 \end{cases}.$$

On voit donc que E_{λ_1} est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$. On raisonne de la même façon pour λ_2 et l'on trouve que λ_2 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} -b \\ 1 \end{pmatrix}$. En conclusion, une solution générale $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de l'équation $X' = AX$ est de la forme

$$X(t) = \alpha \exp(e^a t) \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \exp(e^{-a} t) \begin{pmatrix} -b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Compte tenu des conditions initiales, on voit que

$$\begin{cases} b(\alpha - \beta) &= 1 \\ \alpha + \beta &= 1 \end{cases},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{b}\right) \\ \beta &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{b}\right) \end{cases}.$$

En réinjectant dans l'expression de X on trouve

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{2}(1+b)\exp(e^a t) + \dfrac{1}{2}(1-b)\exp(e^{-a}t) \\ y(t) &= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\exp(e^a t) + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{b}\right)\exp(e^{-a}t) \end{cases}$$

Exercice 47

Soient a et b deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ telles que a soit impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution impaire.

Solution: La propriété qui permet de démarrer l'exercice est simplement le fait qu'une fonction impaire s'annule en 0. Cela permet d'obtenir directement l'unicité : en notant (E) l'équation $y' + ay = b$, si y_1 et y_2 sont deux solutions impaires de (E) elles coïncident en 0 et donc sont égales d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Pour l'existence on note y la solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et l'on cherche à montrer qu'elle est impaire. Or, si l'on note z la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = -y(-t)$, on voit que z est aussi une solution de (E) puisque

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(-t) \\ &= b(-t) - a(-t)y(-t) \\ &= b(t) + a(t)y(-t) \\ &= b(t) - a(t)z(t) \end{aligned}$$

Comme $z(0) = y(0) = 0$, d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz les fonctions y et z sont égales, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = -y(-t),$$

ce qui signifie exactement que y est impaire.

Exercice 48

On note $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on définit $T : E \to E$ par

$$\forall f \in E,\ (Tf)(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que T est un automorphisme (application linéaire inversible) de E dans E.

(b) Montrer que T n'a pas de vecteurs propres.

Solution:

(a) Le caractère linéaire de T est clair, le fait que $T(f) \in E$ si $f \in E$ aussi. Pour montrer que T est bijectif, puisque E est de dimension infinie il faut montrer à la fois que T est injectif et surjectif.

Injectivité. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier le membre de droite de l'équation étant une fonction de classe C^1, on voit que f aussi est de classe C^1. On peut donc dériver la relation précédente pour obtenir

$$f' = -f.$$

Comme on sait de plus que

$$\begin{aligned} f(0) &= -\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0, \end{aligned}$$

on voit que f est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 est s'annule en un point, donc par unicité dans Cauchy-Lipschitz ne peut être que la fonction nulle.

Surjectivité. Soit $g \in E$, on cherche à trouver $f \in E$ telle que $T(f) = g$, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = g(x).$$

On ne peut pas dériver cette relation car g est seulement supposée continue. Par contre, en définissant

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

la fonction F est dérivable et vérifie l'équation différentielle

$$F' + F = g.$$

C'est une équation différentielle que l'on peut résoudre par la méthode de variation de la constante. La solution de l'équation homogène est $h : x \mapsto e^{-x}$, en posant $k : x \mapsto F(x)e^x$, on voit que k vérifie

$$k'(x) = g(x)e^x.$$

Comme on sait de plus que $F(0) = 0$ et donc $k(0) = 0$, on voit que

$$k(x) = \int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t$$

Il reste alors à dériver la fonction $x \mapsto e^{-x}k(x)$ pour obtenir la fonction f qui nous intéresse :

$$f(x) = g(x) - e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\,\mathrm{d}t.$$

(b) Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $T(f) = \lambda f$, le but est de montrer que f est nécessairement nulle. Pour cela, on remarque que l'on peut récrire la relation en

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda - 1)f(x).$$

Si $\lambda = 1$, on peut directement dériver l'équation pour obtenir $f = 0$. Si $\lambda \neq 1$, cela signifie que la fonction f est de classe C^1 et l'on peut dériver l'équation pour obtenir

$$f' = \frac{1}{\lambda - 1}f.$$

Mais comme par ailleurs on peut voir que $f(0) = 0$, on en déduit grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz que f est la fonction nulle.

Exercice 49

Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 1-périodique et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = af$. Montrer que f est 1-périodique si et seulement si $\begin{cases} f(0) & = f(1) \\ f'(0) & = f'(1) \end{cases}$.

Solution: On note f_1 la fonction définie par $f_1(t) = f(t+1)$. On remarque que grâce à la périodicité de a, la fonction f_1 vérifie aussi l'équation $f_1'' = af_1$ puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1''(t) &= f''(t+1) \\ &= a(t+1)f(t+1) \\ &= a(t)f(t+1) \\ &= a(t)f_1(t). \end{aligned}$$

Or, f est 1-périodique si et seulement si $f = f_1$, et comme f et f_1 vérifient la même équation différentielle linéaire d'ordre 2, elles coïncident si et seulement si $(f(t_0), f'(t_0))$ et $(f_1(t_0), f_1'(t_0))$ coïncident pour t_0 arbitraire. En prenant $t_0 = 0$ et en remarquant que $f_1(0) = f(1)$ et $f_1'(1) = f'(1)$, on comprend pourquoi f est 1-périodique si et seulement si

$$\begin{cases} f(0) & = f(1) \\ f'(0) & = f'(1) \end{cases}.$$

Exercice 50

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f' + f$ soit bornée. Montrer que f est bornée.

Solution: La situation est la suivante : on a des informations sur $f' + f$ et on souhaite obtenir des informations sur f. Or ici on peut exprimer explicitement f en fonction de $f' + f$! En effet, si on note $g = f' + f$, alors f vérifie (de façon tautologique) l'équation différentielle

$$f' + f = g.$$

On résout cette équation par la méthode de la variation de la constante : une solution de l'équation homogène est $f_0 : t \mapsto e^{-t}$, donc f sous la forme $f = hf_0$. On voit alors que $h = ff_0^{-1}$ vérifie

$$h'(t) = g(t)e^t,$$

et comme $h(0) = f(0)$ on peut conclure que

$$f(t) = f(0)e^{-t} + e^{-t}\int_0^t g(s)e^s \,\mathrm{d}s.$$

On peut remarquer que la formule ci-dessus vaut pour n'importe quelle fonction f de classe C^1, c'est-à-dire que l'on a toujours,

$$f(t) = f(0)e^{-t} + e^{-t}\int_0^t (f(s) + f'(s))e^s \,\mathrm{d}s,$$

mais il faut bien avouer que cette formule est difficile à deviner sans passer par les équations différentielles. À partir de là, c'est simplement une histoire de majoration : si l'on note M un majorant de $|g| = |f' + f|$ alors pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= \left| f(0)e^{-t} + e^{-t}\int_0^t g(s)e^s \,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq |f(0)| + e^{-t}\int_0^t |g(s)|e^s \,\mathrm{d}s \\
&\leq |f(0)| + Me^{-t}\int_0^t e^s \,\mathrm{d}s \\
&= |f(0| + Me^{-t}(e^t - 1) \\
&\leq |f(0)| + M,
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 51

Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de $+\infty$ de $f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solution: Pour l'unicité, il suffit de prendre f_1 et f_2 deux solutions bornées au voisinage de $+\infty$ de $f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{x}$ et de montrer qu'elles sont égales. Or la différence $f_3 = f_1 - f_2$ vérifie l'équation homogène

$$f_3' = f_3$$

et est elle aussi bornée au voisinage de $+\infty$. Mais la seule solution de l'équation $x' = x$ bornée au voisinage de $+\infty$ est la fonction nulle, donc $f_3 = 0$, c'est-à-dire $f_1 = f_2$.

Pour l'existence, il faut expliciter la solution générale de l'équation : grâce à la méthode de variation de la constante, on peut voir que toute solution est de la forme

$$f(x) = e^x\left(\lambda + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right),$$

où λ est un réel arbitraire. On voit alors que pour que f ne diverge pas $+\infty$, il faut que le terme dans la parenthèse tende vers 0 lorsque $x \to +\infty$, c'est-à-dire qu'il faut prendre

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

À l'aide de la relation de Chasles pour les intégrales, on peut réécrire le terme entre parenthèse afin d'obtenir la solution f qui est potentiellement bornée au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = -e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Il reste alors à vérifier que cette solution est bien bornée au voisinage de $+\infty$ mais le calcul est direct :

$$\begin{aligned}|f(x)| &= e^x \left|\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{e^x}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{e^x}{x}(-0+e^{-x}) \\ &\leq \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

La solution f est donc bien bornée (elle tend même vers 0) lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 52

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f'' + 2f' + 2f = g$ possède au plus une solution bornée.

Solution: Il suffit de prendre f_1 et f_2 deux solutions bornées de $f'' + 2f' + 2f = g$ et de montrer qu'elles sont égales. Or la différence $f_3 = f_1 - f_2$ vérifie l'équation homogène

$$f_3'' + 2f_3' + 2f_3 = 0$$

et est elle aussi bornée. Comme les racines du polynôme $X^2 + 2X + 2$ sont

$$\lambda_\pm = -1 \pm i,$$

les solutions de l'équation différentielle $x'' + 2x' + 2x = 0$ sont de la forme

$$x(t) = e^{-t}(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))$$

où α et β sont deux constantes, de sorte que la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle. En conclusion $f_3 = 0$, c'est-à-dire $f_1 = f_2$.

Exercice 53

Soient $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f'' + (1+q)f = 0$.

(a) Pourquoi une telle fonction f existe ?

(b) En notant $h = (f')^2 + f^2$, montrer que $h' \leq |q|h$. Puis en considérant $g(t) = h(t)\exp\left(-\displaystyle\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right)$, montrer que h est bornée.

(c) Montrer qu'il existe des fonctions a et b de classe C^1 telles que $\begin{cases} f = a\cos + b\sin \\ f' = -a\sin + b\cos \end{cases}$.

(d) Montrer que a et b ont une limite finie en $+\infty$.

Solution:

(a) La fonction f est définie comme solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients continus, son existence est donc garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

(b) Il suffit de faire la calcul :

$$\begin{aligned}h' &= 2f''f' + 2f'f \\ &= -2(1+q)ff' + 2f'f \\ &= -2qff',\end{aligned}$$

puis d'utiliser l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$:

$$\begin{aligned} |h'| &= 2|q||ff'| \\ &\leq |q|(|f|^2+|f'|^2) \\ &= |q|h. \end{aligned}$$

On s'aide ensuite de l'indication de l'énoncé en calculant la dérivée de la fonction g :

$$\begin{aligned} g'(t) &= h'(t)\exp\left(-\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right) - |q(t)|h(t)\exp\left(-\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right) \\ &= (h'(t)-|q(t)|h(t))\exp\left(-\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

En particulier la fonction g est décroissante et est donc majorée par $g(0)=h(0)$. À partir de là, en utilisant le fait que q est intégrable,

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t)\exp\left(\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right) \\ &\leq h(0)\exp\left(\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right) \\ &\leq h(0)\exp\left(\int_0^{+\infty} |q(u)|\,\mathrm{d}u\right), \end{aligned}$$

et l'on remarque que le membre de droite dans la dernière inégalité est bien indépendant de t, c'est un majorant de h : la fonction h est bien bornée.

(c) Il faut faire attention, cette question n'a rien à voir avec les équations différentielles ! En effet, à t fixé les inconnues $a(t)$ et $b(t)$ sont solutions d'un système linéaire, à savoir

$$\begin{cases} a(t)\cos(t)+b(t)\sin(t) = f(t) \\ -a(t)\sin(t)+b(t)\cos(t) = f'(t) \end{cases}$$

et ce système s'inverse très bien :

$$\begin{cases} a(t) = f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t) \\ b(t) = f(t)\sin(t) + f'(t)\cos(t) \end{cases}.$$

Il est alors clair que les fonctions a et b sont de classe C^1.

(d) Pour montrer que les fonctions a et b possèdent une limite finie en $+\infty$, il suffit de montrer que les fonctions a' et b' sont intégrables, puisqu'alors par définition $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = a(0) + \int_0^{+\infty} a'(s)\,\mathrm{d}s$ et de même pour b. Or,

$$\begin{aligned} a' &= (f\cos - f'\sin)' \\ &= f'\cos - f\sin - f''\sin - f'\cos \\ &= -f\sin + (q+1)f\sin \\ &= qf\sin. \end{aligned}$$

Mais puisque la fonction h est bornée il en est de même pour f et donc la fonction $qf\sin$ est le produit d'une fonction intégrable (à savoir q) et d'une fonction bornée (à savoir $f\sin$), donc est une fonction intégrable. En conclusion a' est intégrable et un calcul similaire permet de conclure la même chose pour b, ce qui est suffisant pour montrer ce que demande l'énoncé.

Remarque. Qu'a-t-on montré ? L'équation étudiée est une perturbation de l'équation de l'oscillateur harmonique (qui s'écrit $f''+f=0$), perturbation par le terme qf qui est supposée asymptotiquement petite (puisque q est intégrable). La question (b) vise à montrer que l'énergie mécanique h reste bornée. Et la conclusion, en notant a_∞ et b_∞ les limites de respectivement a et b en $+\infty$, est que

$$f = \underbrace{a_\infty\cos + b_\infty\sin}_{\text{solution de l'équation non perturbée}} + o(1),$$

c'est-à-dire que la solution f de l'équation perturbée se comporte asymptotiquement comme la solution de l'équation non perturbée.

Exercice 54

Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive et f une solution non nulle de $f'' - qf = 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Solution: Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction f non nulle solution de $f'' = qf$ qui s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$. Comme on sait que les zéros de f sont isolés (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), on peut trouver $x_1 < x_2$ deux zéros de f tels que f ne s'annule pas sur $]x_1\,,x_2[$. Quitte à remplacer f par $-f$ (car par linéarité $-f$ vérifie la même équation différentielle que f), on peut supposer que f est positive sur $]x_1\,,x_2[$. Mais alors f'' est aussi positive sur $]x_1\,,x_2[$, c'est-à-dire que sur ce segment la fonction f est convexe. Or la seule fonction convexe positive sur $]x_1\,,x_2[$ qui s'annule en x_1 et x_2 est la fonction nulle (faire un schéma) et donc f est nulle sur $]x_1\,,x_2[$ ce qui contredit le fait qu'elle ne s'annule pas entre x_1 et x_2.

Exercice 55

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on considère l'équation (E) $y'' + ay = 0$. On se donne f et g deux solutions indépendantes de (E).

(a) Expliquer pourquoi tout zéro de f est isolé.

(b) Montrer que la fonction $fg' - f'g$ est constante et non nulle.

(c) On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Montrer que g s'annule sur $]x_1\,,x_2[$.

Solution:

(a) Soit x_0 un zéro de f. Comme f est non nulle (car f et g sont linéairement indépendantes), par le théorème de Cauchy-Lipschitz on sait que nécessairement $f'(x_0) \neq 0$. En conséquence, au voisinage de x_0, on a l'équivalent

$$f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0),$$

or le membre de droite n'est pas nul dans un voisinage de x_0 (sauf en x_0) donc il en est de même pour le membre de gauche : x_0 est un zéro isolé de f.

(b) On note $W = fg' - f'g$. On peut facilement dériver cette fonction

$$\begin{aligned} W' &= f'g' + fg'' - f''g - f'g' \\ &= f(-ag) - (-af)g \\ &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi voir qu'elle est constante. Pour montrer qu'elle est non nulle, on se donne un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme f et g sont deux solutions indépendantes de (E), d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les vecteurs $\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g(x_0) \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, ce qui peut précisément s'écrire

$$\begin{aligned} 0 &\neq \begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix} \\ &= f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0) \\ &= W(x_0). \end{aligned}$$

(c) Par (a), comme les zéros de f sont isolés, on peut trouver des zéros x_3 et x_4 de f tels que $x_1 \leq x_3 < x_4 \leq x_2$ et tels que f ne s'annule pas sur $]x_3\,,x_4[$. En particulier, f est de signe constant sur $]x_3\,,x_4[$ et donc f' doit changer de signe entre x_3 et x_4 (faire un schéma), c'est-à-dire que $f'(x_3)f'(x_4) < 0$. En évaluant la fonction (constante) $fg' - f'g$ en x_3 et x_4, on voit que

$$f'(x_3)g(x_3) = f'(x_4)g(x_4).$$

Mais comme f' change de signe entre x_3 et x_4, il doit en être de même pour g, c'est-à-dire $g(x_3)g(x_4) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure que g s'annule dans l'intervalle $]x_3\,,x_4[$ qui est bien inclus dans $]x_1\,,x_2[$.

Exercice 56

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on note (E) $f'' + qf = 0$.

(a) Soient f_1 et f_2 deux solutions non liées de (E). Montrer que la fonction $f_1'f_2 - f_1f_2'$ est constante et non nulle.

(b) Soit f une solution bornée de (E). Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ puis que celle-ci est nulle.

(c) En déduire que (E) a des solutions non bornées.

Solution:

(a) On note $W = f_1'f_2 - f_1f_2'$. Pour montrer que cette fonction est constante on la dérive :

$$\begin{aligned} W' &= f_1''f_2 + f_1'f_2' - f_1'f_2' - f_1f_2'' \\ &= -qf_1f_2 - f_1(-qf_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour montrer qu'elle est non nulle, on remarque qu'en un point , par exemple en 0,

$$W(0) = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{vmatrix}.$$

Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le fait que les fonctions f_1 et f_2 ne soient pas liées est équivalent au fait que les vecteurs $\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_1'(0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} f_2(0) \\ f_2'(0) \end{pmatrix}$ ne soient pas colinéaires, et est donc équivalent au fait que $W(0) \neq 0$.

(b) Il suffit de remarquer que si f est bornée alors la fonction qf est intégrable, et donc il en est de même pour f''. Mais il est alors clair que la fonction f' admet une limite et elle vaut

$$\lim_{t \to +\infty} f'(t) = f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pour montrer que cette limite l est nulle on suppose qu'elle ne l'est pas. Quitte à considérer $-f$ (car $-f$ est aussi une solution bornée de (E)) on peut supposer $l > 0$. Mais il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq A$ on a $f'(t) \geq \dfrac{l}{2}$. Si $t \geq A$, en intégrant l'inéquation précédente on obtient

$$f(t) - f(A) \geq (t - A)\frac{l}{2},$$

mais c'est alors une contradiction manifeste (lorsque $t \to +\infty$) avec le fait que f est bornée.

(c) Supposons par l'absurde que toutes les solutions de (E) sont bornées. Comme l'espace des solutions est de dimension 2 (c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz) on peut trouver deux solutions f_1 et f_2 non liées et toutes les deux bornées. Puisque dans ce cas f_1' et f_2' tendent vers 0 en $+\infty$, on voit que $W = f_1'f_2 - f_1f_2'$ tend vers 0 en $+\infty$. Mais c'est une contradiction avec (a) puisque la fonction W est constante et non nulle.

Exercice 57

Chercher les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de $x^2f''(x) + xf'(x) - f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Solution: On cherche une solution sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

et la tâche est de calculer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients. Calculons tout d'abord le membre de gauche :

$$\begin{aligned} x^2f''(x) + xf'(x) - f(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 1)a_n x^n. \end{aligned}$$

Quant au terme de droite, il se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1-x^2} &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}.\end{aligned}$$

Puisque deux séries entières sont égales si et seulement si les suites de leurs coefficients sont identiques,

$$\forall n \geq 1,\ \begin{cases} a_{2n} & = \dfrac{1}{(2n)^2-1}, \\ a_{2n+1} & = 0. \end{cases}$$

et $a_0 = 0$, et a_1 peut être choisi librement (la fonction $x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène). Il reste à calculer l'expression de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^2-1} \\ &= a_1 x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n} \\ &= a_1 x + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= a_1 x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Or la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est la primitive de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, et la primitive de cette fonction est $\operatorname{arctanh}(x)$ $= \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. En conclusion, on obtient l'expression suivante pour f :

$$f(x) = \frac{1}{2} + a_1 x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x} \right) \operatorname{arctanh}(x),$$

où l'on rappelle que le choix de a_1 est libre.

Exercice 58

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f vérifie l'équation (E) $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

(b) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière.

(c) En déduire le développement en série entière de f.

Solution:

(a) On note g la fonction (à deux variables) définie par $g(x,t) = \cos(x \sin(t))$. On voit facilement que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x,t) \text{ et } \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x,t) = -\sin(t)^2 \cos(x,t),$$

en conséquence les fonctions $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\bullet)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,\bullet)$ sont majorées uniformément en x par la fonction constante et égale à 1 qui est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: cela justifie que l'on puisse dériver sous le signe intégral et ainsi obtenir

$$\begin{aligned} xf''(x)+f'(x)+xf(x) &= -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin(t)^2)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(t)^2\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \left([-\cos(t)\sin(x\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)x\cos(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(t)^2\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(t)^2\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) On cherche les solutions sous la forme

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

On calcule alors $xh''(x)+h'(x)+xh(x)$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} xh''(x)+h'(x)+xh(x) &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= a_1 x + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

Puisqu'une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a_1 = 0$ et

$$\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}.$$

Ainsi a_n est nul si n est impair et

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{(-1)^m a_0}{(2m\times(2m-2)\times\ldots\times 2)^2} \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{(2^m m!)^2}. \end{aligned}$$

(c) Il faudrait justifier que f est développable en série entière : pour cela il faut développer en série entière le cosinus dans l'intégrande puis intégrer terme à terme (et justifier la licité des opérations décrites même si on ne le fait pas ici) pour obtenir

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^{2m}\,\mathrm{d}t\right)x^{2m}.$$

Mais pour calculer ces coefficients directement il suffit d'utiliser (b), puisque l'on sait que f est développable en série entière et vérifie (E). Comme $a_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$, on voit que

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2^m m!)^2}.$$

1.5 Topologie

Exercice 59

Montrer que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme dans le cas où :

(a) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $N(P) = |P(0)| + |P(1)| + \ldots + |P(n)|$.

(b) $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $N(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(c) $E = \{f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(0) = f'(0) = 0\}$ et $N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x) + f(x)|$.

Solution:

(a) La positivité et l'homogénéité ne posent pas de problèmes. De même pour l'inégalité triangulaire, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire réelle : si P et Q sont des éléments de E,

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= |P(0)+Q(0)| + |P(1)+Q(1)| + \ldots + |P(n)+Q(n)| \\ &\leq |P(0)| + |Q(0)| + |P(1)| + |Q(1)| + \ldots + |P(n)| + |Q(n)| \\ &= N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

Quant au caractère défini, si l'on se donne un polynôme P tel que $N(P) = 0$, cela signifie que $P(0) = P(1) = \ldots = P(n) = 0$; le polynôme P admet donc $n+1$ racines mais est de degré au plus n, il est donc nul.

(b) La positivité et l'homogénéité ne posent pas de problèmes. L'inégalité triangulaire doit se faire proprement. On se donne A et B deux matrices réelles, ainsi que $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \\ &\leq N(A) + N(B), \end{aligned}$$

la première inégalité étant simplement l'inégalité triangulaire réelle et la seconde découle des propriétés du sup et de la définition de N. Ensuite, en passant au sup sur $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dans le membre de gauche, on a bien $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$. Enfin, pour la caractère défini, si l'on se donne $A \in E$ tel que $N(A) = 0$, il est clair que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0$ et donc $a_{ij} = 0$ pour tous i et j.

(c) La positivité et l'homogénéité ne posent pas de problèmes. L'inégalité triangulaire non plus, puisque si l'on se donne f et g deux éléments de E alors pour tout $x \in [0\,,1]$ on a

$$\begin{aligned} |(f+g)''(x) + (f+g)(x)| &= |f''(x) + g''(x) + f(x) + g(x)| \\ &\leq |f''(x) + f(x)| + |g''(x) + g(x)| \\ &\leq N(f) + N(g). \end{aligned}$$

En passant ensuite au sup sur $x \in [0\,,1]$, on obtient bien $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$. Pour le caractère défini, si l'on se donne $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, cela signifie que $f'' + f = 0$ sur $[0\,,1]$. C'est alors un résultat classique que f est une combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b tels que $f = a\cos + b\sin$. Mais le fait que $f(0) = 0$ nous apprend que $a = 0$, et de même puisque $f'(0) = 0$, on voit que $b = 0$. En conclusion, f est bien la fonction nulle.

Exercice 60

Soit E l'ensemble des fonctions $[0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

(b) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

(c) Sont-elles équivalentes à $\|\ \|_\infty$?

Solution:

(a) Que ce soit pour N_1 ou N_2, la positivité et l'homogénéité ne posent pas de problème. Pour l'inégalité triangulaire, si on se donne f et g deux éléments de E, alors pour tout $x \in [0\,,1]$,

$$\begin{aligned} |f(0) + g(0)| + |f('(x) + g'(x)| &\leq |f(0)| + |f'(x)| + |g(0)| + |g'(x)| \\ &\leq N_1(f) + N_1(g). \end{aligned}$$

On peut alors passer au supremum sur $x \in \mathbb{R}$ dans le membre de gauche pour obtenir $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$. De manière similaire on a

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| + |f('(x) + g'(x)| &\leq |f(x)| + |f'(x)| + |g(x)| + |g'(x)| \\ &\leq N_2(f) + N_2(g). \end{aligned}$$

On peut alors passer au supremum sur $x \in \mathbb{R}$ dans le membre de gauche pour obtenir $N_2(f+g) \leq N_2(f)+N_2(g)$. Cela prouve que f et g satisfont à l'inégalité triangulaire. Pour ce qui est du caractère défini positif, il est clair que si $N_2(f)=0$ alors $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f=0$. En revanche, si $N_1(f)=0$ alors $\|f'\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $f'=0$: la fonction f est constante mais $f(0)=0$ donc la fonction f est nulle.

(b) Il est clair que $N_1 \leq N_2$ car on a toujours $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$. Mais de plus, si $x \in [0\,,1]$, on voit que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq |f(0)| + x\|f'\|_\infty \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \\ &= N_1(f). \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur $x \in \mathbb{R}$ dans le membre de gauche, on voit que $\|f\|_\infty \leq N_1(f)$ et donc $N_2(f) \leq 2N_1(f)$. On en conclut que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

(c) Il est clair que si $f \in E$, alors $\|f\|_\infty \leq N_2(f)$. En revanche, on ne pourra pas majorer $N_2(f)$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ car $N_2(f)$ mesure aussi la « taille » de la dérivée de f : si une fonction f a une « grande » dérivée mais ne prend pas des valeurs trop grandes, alors $N_2(f)$ sera beaucoup plus grand que $\|f\|_\infty$. Formellement parlant, on définit par exemple $f_n(x) = \sin(nx)$. On peut alors calculer, si $n \geq 2$, que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$. En conséquence,

$$\frac{N_2(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n+1,$$

ce qui montre, en faisant tendre n vers $+\infty$, qu'il n'existe pas de constante k telle que $N_2(f) \leq k\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. En conclusion, les normes N_2 et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes, et il en est *a fortiori* de même pour N_1 et $\|\ \|_\infty$.

Exercice 61

Soient $a, b > 0$. On définit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $N(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) En notant N_2 la norme euclidienne, montrer qu'il existe α et β tels que $\alpha N_2 \leq N \leq \beta N_2$. Préciser les constantes α et β optimales.

Solution:

(a) L'homogénéité ne pose de problème. Pour la positivité, il est clair que si $N(x,y) \geq 0$ et que l'on a égalité si et seulement si $ax^2 + bx^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = y = 0$ puisque a et b sont strictement positifs. Pour l'inégalité triangulaire, il est possible de la faire « à la main » mais il y a plus judicieux : en notant

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle = a^2x_1x_2 + b^2y_1y_2,$$

on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et il est clair que N est la norme associée à ce produit scalaire, elle vérifie donc l'inégalité triangulaire.

(b) L'existence de α et β provient de l'équivalence de la norme N avec N_2 (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Pour trouver les constantes optimales, en supposant $a \leq b$, il est clair que $a^2y^2 \leq b^2y^2$ et $a^2x^2 \leq b^2y^2$ de sorte que

$$aN_2(x,y) \leq N(x,y) \leq bN_2(x,y).$$

Et on a égalité en prenant $(x,y) = (1,0)$ pour la première inégalité, $(x,y) = (0,1)$ pour la seconde. En conclusion, dans le cas général.

$$\begin{cases} \alpha &= \min(a,b) \\ \beta &= \max(a,b) \end{cases}.$$

Exercice 62

(a) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $2A$ soit semblable à A.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui soit invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$ pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solution:

(a) Si l'on fait l'analyse, on se rend compte que les valeurs propres de A doivent être nulles. Comme de plus on veut que A soit non nulle, on en vient à choisir $A = E_{12}$, c'est-à-dire la matrice dont le seul coefficient non nul vaut et se situe sur la première ligne et la deuxième colonne. Et en effet on a bien $2A = P^{-1}AP$ lorsque P est la matrice diagonale dont la diagonale vaut $\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1\right)$.

(b) Il suffit de raisonner par l'absurde : si c'était possible, en prenant la matrice A de la question (a) on trouverait $\|2A\| = \|A\|$ ce qui est une contradiction puisque $\|2A\| = 2\|A\|$ et $\|A\| \neq 0$ (car A est non nulle).

Exercice 63

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq p} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$, et si $X \in \mathbb{R}^p$ on note $\|X\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i\leq p} |x_i|$.

(a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\|A\| = \sup\limits_{X\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

(c) Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Solution:

(a) La positivité et l'homogénéité ne posent pas de problèmes. L'inégalité triangulaire doit se faire proprement. On se donne A et B deux matrices réelles, ainsi que $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij} + b_{ij}| &\leq \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{p} |b_{ij}| \\ &\leq \|A\| + \|B\|,\end{aligned}$$

la première inégalité étant simplement l'inégalité triangulaire réelle et la seconde découle des propriétés du sup et de la définition de $\| \ \|$. Ensuite, en passant au sup sur $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ dans le membre de gauche, on a bien $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Enfin, pour la caractère défini, si l'on se donne $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| = 0$, il est clair que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ on a $\sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}| = 0$ et donc $a_{ij} = 0$ pour tous i et j.

(b) Soit $X \in \mathbb{R}^p$ non nul. Il est alors assez clair que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, la valeur absolue de la i-ième coordonnée du vecteur AX vaut

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} |x_j a_{ij}| \\ &\leq \left(\sup_{1\leq j\leq p} |x_j|\right)\left(\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\right) \\ &\leq \left(\sup_{1\leq j\leq p} |x_j|\right)\sup_{1\leq i\leq p}\left(\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\right) \\ &\leq \|X\|_\infty \|A\|.\end{aligned}$$

Et comme i est arbitraire et n'apparaît pas dans le second membre, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty\|A\|$. En particulier, comme X est arbitraire,

$$\|A\| \geq \sup_{X\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

Pour l'inégalité réciproque, on note i_0 un indice tel que

$$\sum_{j=1}^{p} |a_{i_0 j}| = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

On définit ensuite le vecteur $X \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_{i_0 j} < 0 \end{cases}.$$

Il est alors clair que $\|X\|_\infty = 1$ et que

$$\begin{aligned} (AX)_{i_0} &= \sum_{j=1}^{p} x_j a_{i_0 j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} |a_{i_0 j}| \\ &= \|A\|. \end{aligned}$$

On a donc $\|AX\|_\infty \geq \|A\|$, c'est-à-dire, comme $\|X\|_\infty = 1$, que $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \geq \|A\|$. On a bien l'autre inégalité, à savoir

$$\|A\| \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

(c) Il faut utiliser (b). En particulier, pour tout vecteur X et toute matrice C, on a $\|CX\|_\infty \leq \|C\|\|X\|_\infty$. Fort de cette observation, si on se donne $X \in \mathbb{R}^p$ non nul et A et B deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|(AB)X\|_\infty &= \|A(BX)\|_\infty \\ &\leq \|A\|\|BX\|_\infty \\ &\leq \|A\|\|B\|\|X\|_\infty. \end{aligned}$$

Il est alors clair que pour tout $\|X\|$, on a

$$\frac{\|(AB)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|\|B\|,$$

ce qui, d'après (b), en passant au supremum sur $X \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, s'écrit $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 64

On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie et l'on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que chacune des suites coordonnées admette une sous-suite convergente. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une sous-suite convergente ?

Solution: On fixe tout d'abord une notation : à $n \in \mathbb{N}$ fixé, les coordonnées de u_n sont notées $u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^p$.

Si l'on tente la solution naïve, c'est-à-dire si l'on extrait de $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)}^1)$ qui converge, alors rien ne garantit que l'on puisse extraire de $(u_{\varphi(n)}^2)$ une sous-suite qui converge. Cela incite à penser que l'on ne pourra pas extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge.

Il faut donc exhiber un contre exemple. On suppose $p \geq 2$ (sinon l'exercice est trivial) et l'on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^1 = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},\ u_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},\ \text{et } \forall k \geq 3,\ u_n^k = 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la propriété requise par l'énoncé, en revanche comme $\|u_n\|_\infty = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est bornée et *a fortiori* n'est convergente.

Exercice 65

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E dont l'intérieur est non vide. Montrer que $F = E$.

Solution: Puisque F est d'intérieur non vide, il existe une boule de rayon strictement positif contenue dans F, plus précisément il existe $r > 0$ et $x \in E$ tels que $B(x, r) \subset F$ (ici $B(x, r)$ désigne la boule fermée et de rayon r). Mais comme F est un sous-espace vectoriel, on peut « translater » et « dilater » cette boule !

Plus précisément, on peut voir que $B(0,r) \subset F$. En effet, si $y \in B(0,r)$, alors $x+y \in B(x,r)$ (faire un schéma), donc $x+y \in F$. Puisque de plus $x \in F$, on voit que $y = x+y-x \in F$.
Et on peut voir que pour tout $\lambda > 0$, on a $B(0,\lambda r) \subset F$. En effet, si $y \in B(0,\lambda r)$, alors $\dfrac{y}{\lambda} \in B(0,r)$ donc $\dfrac{y}{\lambda} \in F$. Comme $y = \lambda \times \dfrac{y}{\lambda}$ et que F est un sous-espace vectoriel, on voit que $y \in F$.
Pour conclure, il suffit de remarquer que λ est arbitraire. Comme la réunion des boules de centre 0 et de rayon quelconque est E, c'est suffisant pour conclure que $F = E$.

Exercice 66

Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0\}$ est fermé.

(b) Réciproquement, soit F un fermé de E et $f : x \mapsto d(x,F)$. Montrer que f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$.

Solution:

(a) On note $F = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0\}$ et l'on se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = 0$. Mais comme f est continue, on peut passer cette égalité à la limite et ainsi obtenir $f(x) = 0$, c'est-à-dire que $x \in F$.

(b) On commence par montrer que f est continue. Pour cela, si on se donne x et y deux points quelconques de E et z un point de F, on a

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|.$$

Mais comme $\|x-z\| \geq d(x,F)$, on peut écrire que

$$\|y-z\| \geq d(x,F) - \|x-y\|.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $z \in F$, on peut passer à l'infimum dans le membre de gauche pour obtenir

$$d(y,F) \geq d(x,F) - \|x-y\|,$$

ce que l'on peut réécrire $d(x,F) - d(y,F) \leq \|x-y\|$ et donc par symétrie de x et y on peut dire que

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|,$$

ce qui prouve que la fonction f est lipschitzienne et donc continue.

Il faut alors prouver que $F = f^{-1}(\{0\})$. Il est clair que si $z \in F$ alors $f(z) = 0$, c'est-à-dire que $F \subset f^{-1}(\{0\})$. Pour prouver l'inclusion réciproque, soit z tel que $f(z) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$\inf_{z' \in F} \|z - z'\| = 0.$$

On peut donc trouver une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tels que $\lim_{n\to+\infty} \|z_n - z\| = 0$. Cette dernière information permet de dire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z. Mais on sait de plus que $z_n \in F$ pour tout F, donc comme F est fermée on peut bien dire que $z \in F$, ce qui est précisément ce que l'on voulait obtenir.

Exercice 67

Soient E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E, on définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Montrer que si A est ouverte, alors $A+B$ est ouverte.

(b) Si $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.

(c) En reprenant les A et B de (b), montrer que $A+B$ n'est pas fermée.

Solution:

(a) Soit $x = a+b$ un élément de $A+B$ (avec $a \in A$ et $b \in B$). Il s'agit de montrer qu'il existe une boule de rayon strictement positif centrée en x et contenue dans $A+B$. Comme A est ouverte et que $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que tout y vérifiant $\|y-a\| \leq r$ soit inclus dans A. Il est clair que pour tout z vérifiant $\|z-x\| \leq r$, on a $\|(z-b)-a\| \leq r$ donc $z-b \in A$, et donc $z = (z-b)+b$ appartient à $A+B$. On a donc montré que la boule de centre x et de rayon r est incuse dans $A+B$, ce qui est suffisant pour conclure que $A+B$ est ouverte.

(b) Soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Comme de plus pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x_ny_n=1$ (car $(x_n,y_n)\in A$), on peut conclure, en passant à la limite, que $xy=1$, c'est-à-dire que $(x,y)\in A$. En conclusion, A est fermée

Pour B c'est plus simple : un élément $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ appartient à B si et seulement $x=0$. En particulier, si une suite $((0,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B converge, il est clair que la première coordonnée de la limite de la suite est nulle, et donc la limite appartient à B.

(c) Il faut calculer $A+B$. Comme pour tout élément (x,y) de A on a $y=\dfrac{1}{x}$, on peut écrire que

$$A+B=\left\{\left(x,\frac{1}{x}+t\right)\;\middle|\; x\in\mathbb{R}^\star \text{ et } t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Il est alors clair que $A+B=\mathbb{R}^2\backslash(\{0\}\times\mathbb{R})$ (faire un schéma). Il suffit alors de considérer la suite $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$, puisque sa limite, à savoir $(0,0)$, n'appartient pas à $A+B$.

Exercice 68

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour $r\in\{0,1,\dots,n\}$, l'ensemble $\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(M)\geq r\}$ est ouvert.

Solution:

(a) La solution la plus élégante consiste à dire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}^\star)$, c'est-à-dire est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, et par conséquent est un ouvert.

(b) Soit M une matrice de rang supérieur ou égal à r. Tout commence avec une propriété d'algèbre linéaire dont il faut se souvenir : il existe une sous-matrice de M de taille $r\times r$ qui est inversible. C'est-à-dire qu'il existe I et J deux deux sous-ensembles de $\{1,2,\dots,n\}$ de cardinal r tels que la matrice $(m_{ij})_{i\in I,j\in J}$ soit inversible.

On dénotera dans la suite la norme infinie sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par respectivement $\|\ \|_r$ et $\|\ \|_n$.

Le but est alors de montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que si $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|N\|_n\leq\varepsilon$ alors $M+N$ est de rang au moins r. Mais on sait, par (a), qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que si $P\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifie $\|P\|_r\leq\varepsilon$ alors $(m_{ij})_{i\in I,j\in J}+P$ est une matrice inversible.
Si l'on se donne alors $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|N\|_n\leq\varepsilon$, il est clair, d'après la définition de la norme infinie, que $\|(n_{ij})_{i\in I,j\in J}\|_r\leq\varepsilon$. En particulier, la matrice $(m_{ij}+n_{ij})_{i\in I,j\in J}$ est inversible. La matrice $M+N$ admet donc une sous-matrice de taille $r\times r$ qui est inversible, donc est de rang au moins r.

Exercice 69

Soient $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$ et $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ une application continue et k-lipschitzienne avec $k<1$. Soit $x_0\in\mathbb{R}^p$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1}=f(x_n)$.

(a) Montrer qu'il existe C tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \|x_{n+1}-x_n\|\leq Ck^n$.

(b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note x sa limite.

(c) Montrer que $f(x)=x$ et que si $y\in\mathbb{R}^p$ vérifie $f(y)=y$ alors $y=x$.

Solution:

(a) On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\| &= \|f(x_n)-f(x_{n-1})\|\\ &\leq k\|x_n-x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

Une simple récurrence permet alors de conclure, et l'on peut même dire que $C=\|x_1-x_0\|$ convient.

(b) Par (a), on sait que la série $\sum\|x_{n+1}-x_n\|$ est majorée par une série géométrique de raison $k<1$ donc converge. Une propriété du cours permet de justifier qu'alors la série $\sum(x_{n+1}-x_n)$ converge, c'est-à-dire en d'autres termes que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(c) Comme la fonction f est continue, on peut passer à la limite dans la relation $f(x_n) = x_{n+1}$ et obtenir $f(x) = x$. Si y est un autre point fixe de f, on voit que

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|f(x)-f(y)\| \\ &\leq k\|x-y\|.\end{aligned}$$

Mais puisque $k < 1$, on a nécessairement $\|x-y\| = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

Remarque. Le résultat démontré dans cet exercice s'appelle le théorème du point fixe de Picard, il affirme que toute fonction contractante (c'est-à-dire lipschitzienne et avec une constante de lipschitz strictement inférieure à 1) de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ possède un et un seul point fixe.

Exercice 70

Soient E un espace euclidien (on note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur E) et $f : [0\,,1] \to E$ une fonction continue. On suppose que $\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

On définit le vecteur unitaire u par $u = \dfrac{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}{\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\|}$ et pour tout $t \in [0\,,1]$ on note $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$ la décomposition de $f(t)$ selon $\mathbb{R}u \oplus (\mathbb{R}u)^\perp$ (c'est-à-dire $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ et $v(t) \in (\mathbb{R}u)^\perp$).

(a) Justifier que α et v sont des fonctions continues sur $[0\,,1]$.

(b) Montrer que $\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$ est orthogonal à u et en déduire que $\int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

(c) En déduire que pour tout $t \in [0\,,1]$, on a $f(t) = \|f(t)\|u$. Quelle est l'interprétation géométrique ?

Solution:

(a) En notant p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$, on sait que p est une application linéaire sur un espace de dimension finie, donc elle est continue. Il faut alors remarquer que $v = f - p \circ f$ donc v est bien continue comme composition de fonctions continues, et $\forall t \in [0\,,1],\ \alpha(t) = \langle p(f(t)), u\rangle$, donc α est aussi une fonction continue.

(b) Il s'agit d'utiliser la propriété d'interversion de l'intégrale et de l'application continue $\langle \bullet, u\rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t, u\right\rangle &= \int_0^1 \langle v(t), u\rangle\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 0\cdot\,\mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

À partir de là, il suffit de remarquer, comme u est unitaire, que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t &= \left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &= \left\langle \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, u\right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^1 \alpha(t)u, u\right\rangle + \left\langle \int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t, u\right\rangle \\ &= \int_0^1 \alpha(t)\langle u, u\rangle\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(c) Comme on sait de plus que p est une projection orthogonale et ne peut donc que diminuer les distances,

$$\begin{aligned}|\alpha(t)| &= \|\alpha(t)u\| \\ &= \|p(f(t))\| \\ &\leq \|f(t)\|.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'on a les informations $\alpha \leq \|f\|$ sur $[0\,,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$, on peut donc conclure que pour tout $t \in [0\,,1]$, $\alpha(t) = \|f(t)\|$. En particulier, le théorème de Pythagore nous apprend que pour tout $t \in [0\,,1]$,

$$\begin{aligned}\|v(t)\|^2 &= \|f(t)\|^2 - |\alpha(t)|^2\|u\|^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est identiquement nulle. En conclusion, on a bien $f(t) = \|f(t)\|u$.
Géométriquement, si l'inégalité triangulaire pour les intégrales est une inégalité, alors les l'image de f est incluse dans une demi-droite dont l'origine est 0 (ici $\mathbb{R}_+u$).

Exercice 71

Soient $a < b$ et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

(a) Montrer le résultat demandé lorsque f est de classe C^1.

(b) Conclure par densité pour le cas général.

Solution:

(a) Si f est de classe C^1, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f'(t)\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t,$$

puis, en notant $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ les suprema des fonctions $|f|$ et $|f'|$ sur $[a\,,b]$ (ils existent car f et f' sont continues sur le segment $[a\,,b]$), on a la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n} + \frac{(b-a)\|f'\|_\infty}{n}.$$

Il est alors clair que l'on en déduit le résultat demandé puisque le membre de droite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

(b) Dans le cas général il faut procéder par densité : plus précisément on sait que les polynômes (et donc les fonctions de classe C^1) sont denses parmi les fonctions continues au sens de $\|\ \|_\infty$. Si l'on se donne une fonction continue f et $\varepsilon > 0$, il existe donc g de classe C^1 telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais par (a), une fois que g est donnée il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq N$, il suffit de mettre les informations bout à bout :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq (b-a)\|f-g\|_\infty + \varepsilon \\ &\leq (b-a+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Mais ε est arbitraire, ce qui est écrit ci-dessus est donc suffisant pour conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

1.6 Calcul différentiel

Exercice 72

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution:

(a) Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, la caractérisation séquentielle marche très bien puisque le dénominateur ne s'annule pas.

Pour prouver la continuité en $(0,0)$, on prend une suite $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $(0,0)$, c'est-à-dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0. On a alors la majoration

$$\begin{aligned}|f(x_n,y_n)| &= \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x_n^2+y_n^2}.\end{aligned}$$

Il est clair que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$, c'est suffisant pour conclure que la limite de la suite $(f(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 et donc que f est continue en $(0,0)$.

(b) On commence par calculer la dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

S'il y a un point où cette fonction n'est pas continue, c'est bien en $(0,0)$! Pour le montrer, on va prendre deux suites qui tendent vers $(0,0)$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ tende vers deux valeurs différentes. Pour cela il suffit de remarquer que si $x\neq 0$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0,$$

et si $y\neq 0$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1.$$

En considérant $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\dfrac{1}{n+1},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((x'_n,y'_n))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(0,\dfrac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on voit que les suites $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((x'_n,y'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers 0 mais $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x'_n,y'_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers 0 et 1.

Exercice 73

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{grad}f(x)$ est orthogonal à x. Que peut-on dire de f ?

Solution: Puisque $\mathrm{grad}f(x)$ est orthogonal à x, f ne varie pas le long des rayons issus de 0 : plus précisément, si on se fixe $x\in\mathbb{R}^n$ et que l'on considère la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=f(tx)$, on voit que

$$\begin{aligned}g'(t) &= \langle \mathrm{grad}f(tx), x\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

de sorte que la fonction g est constante. En particulier $g(1)=g(0)$, c'est-à-dire $f(x)=f(0)$. Mais x est arbitraire, ce qui veut dire que f est une fonction constante. Et réciproquement toute fonction constante vérifie la propriété de l'énoncé puisque son gradient est nul.

Exercice 74

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$. Montrer que f est une application linéaire.

Solution: En dérivant l'expression $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$ par rapport à λ, on obtient

$$\forall (x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x,\lambda y).$$

En évaluant ensuite cette expression pour $\lambda = 0$, on voit que

$$f(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

et il est alors clair que l'application f est linéaire.

Exercice 75

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante sur $]0\,,+\infty[\times]0\,,+\infty[$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

La résoudre en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$.

Solution: On suit l'indication de l'énoncé en considérant la fonction $g :]0\,,+\infty[\times]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = f(u,uv) \text{ c'est-à-dire } f(x,y) = g\left(x, \frac{y}{x}\right).$$

En dérivant la première relation par rapport à u deux fois on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(u,uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(u,uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(u,uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv)\end{aligned}$$

En substituant x à u et $\dfrac{y}{x}$ à v, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(x, \frac{y}{x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right).\end{aligned}$$

En conséquence, puisque f vérifie l'équation aux dérivées partielles en question si et seulement si $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ est nulle, c'est-à-dire, en intégrant deux fois par rapport à u, si et seulement si il existe deux fonction φ et ψ de classe C^2 telles que

$$g(u,v) = \varphi(v)u + \psi(v).$$

En substituant x à u et $\dfrac{y}{x}$ à v, on obtient la forme générale d'une solution de l'équation aux dérivées partielles en question, à savoir

$$f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 76

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3,\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$.

(a) Montrer que f vérifie l'équation aux dérivées partielles (E) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(b) Résoudre (E) en effectuant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

(c) Réciproquement, est-ce que toute solution de (E) vérifie la même propriété que f ?

Solution:

(a) On commence par dériver la relation que vérifie f par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t)=0.$$

En prenant ensuite $t=0$ on obtient le résultat demandé.

(b) Notons $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction de classe C^1 définie par $g(x+y,x-y)=f(x,y)$, c'est-à-dire par $g(u,v)$ $=f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$. En dérivant g par rapport à sa première variable, on voit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\right]\\&=0.\end{aligned}$$

En conséquence, g ne dépend que de sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v)$. On voit alors que

$$\begin{aligned}f(x,y)&=g(x+y,x-y)\\&=h(x-y).\end{aligned}$$

Et réciproquement, si h est une fonction de classe C^1 alors la fonction $(x,y)\mapsto h(x-y)$ est une solution de (E).

(c) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une solution de (E), c'est-à-dire qu'il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x-y)$. On voit alors que $\forall(x,y,t)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}f(x+t,y+t)&=h((x+t)-(y+t))\\&=h(x-y)\\&=f(x,y).\end{aligned}$$

Exercice 77

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On note $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.

(a) Montrer que g est de classe C^2 et que $r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=0$.

(b) On note $u(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que u est de classe C^2 et que $ru''(r)+u'(r)=0$.

(c) En déduire que u est constante et égale à $f(0)$.

Solution:

(a) La fonction g est de classe C^2 comme composition de fonctions de classe C^2. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)),$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos(\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

Quant à la dérivée par rapport à θ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)&=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\right]\\&=-r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\sin(\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2-2r\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial xy}+r^2\cos(\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

En mettant tous les morceaux ensemble on obtient bien

$$\begin{aligned} r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right) \\ &= r(\Delta f)(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) On se fixe $R > 0$. Sur le compact $[0\,, R] \times [0\,, 2\pi]$, la fonction g est de classe C^2 donc il existe une constante M qui majore g, $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ sur ce compact. La fonction constante et égale à M est alors une fonction de domination pour toutes les opérations de dérivation sous le signe intégrale de u, ce qui justifie que l'on puisse écrire

$$u'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta \text{ et } u''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Ces égalités sont valables sur $[0\,, R]$ mais R est arbitraire donc elles sont valables sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, grâce à la question précédente et au théorème fondamental de l'analyse (qui dit que l'intégrale d'une fonction est la différence de sa primitive prise entre les bornes d'intégration),

$$\begin{aligned} ru''(r) + u'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\bullet)\right]_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisqu'en effet on vérifie que g (et donc ses dérivées partielles) sont 2π périodiques en leur deuxième variable, de sorte que $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,0) = \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,2\pi)$.

(c) On voit que la fonction u' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1, or la solution générale de cette équation est $r \mapsto \dfrac{\lambda}{r}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme on sait par ailleurs que u' est bornée au voisinage de 0 (car elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$), on voit que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que u' est nulle. En conclusion, la fonction u est constante et donc égale à $u(0) = f(0)$.

Remarque. Ainsi, si f est une fonction harmonique (de laplacien nul), la valeur moyenne de f sur un cercle centré autour de 0 coïncide avec $f(0)$.

Exercice 78

On rappelle que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. Montrer que si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une transformation orthogonale alors $\Delta(f \circ \phi) = (\Delta f) \circ \phi$.

Solution: On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et g la fonction $f \circ \phi$, c'est-à-dire que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} g(x) &= f(Ax) \\ &= f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i\right)_{1 \leq k \leq n}\right). \end{aligned}$$

À partir de cette expression, on voit que

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^n a_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i\right)_{1 \leq k \leq n}\right)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lj}a_{kj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_l x_k}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i\right)_{1\leq k\leq n}\right).$$

En sommant ces termes pour j allant de 1 à n,

$$\begin{aligned}\Delta g(x) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lj}a_{kj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_l x_k}(Ax)\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj}a_{kj}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_l x_k}(Ax).\end{aligned}$$

Or puisque la matrice A est orthogonale,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi on obtient bien $\Delta g = (\Delta f)\circ\phi$, ce qui est le résultat demandé.

Remarque. Ainsi l'opérateur laplacien ne dépend pas du choix de la base orthonormée dans laquelle on se place : c'est un opérateur intrinsèque qui ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées.

Exercice 79

Soient $a \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2axy$. Trouver les extrema de f.

Solution: On peut voir que $f(x,y) \to +\infty$ si $(x,y) \to +\infty$, plus précisément en utilisant $uv \leq \frac{1}{2}(u^2+v^2)$, on voit que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2axy \\ &\geq x^2y^2 + x^2 + y^2 - a^2 - (xy)^2 \\ &= x^2 + y^2 - a^2. \end{aligned}$$

En particulier $\sup f = +\infty$ et il existe un R tel que $f(x,y) \geq f(0,0)$ si (x,y) n'appartient pas B_R à la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon R. En conséquence

$$\inf f = \inf_{B_R} f,$$

et comme B_R est un compact on sait que l'infimum dans le membre de droite est en réalité un minimum : l'infimum de f est donc atteint, pour déterminer en quels points il faut étudier les points d'annulation du gradient de f. Ces points (x,y) sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 2xy^2 + 2x - 2ay = 0 \\ 2x^2y + 2y - 2ax = 0 \end{cases}.$$

En soustrayant ces deux équations on voit que

$$\begin{aligned} 2xy(y-x) + 2(x-y) - 2a(y-x) &= 2(x-y)(1+a-xy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

À partir de là, soit $x = y$ mais dans ce cas $2x^3 + 2x - 2ax = 0$, c'est-à-dire, si $x \neq 0$, que $x^2 = a-1$, donc $x = \pm\sqrt{a-1}$; soit $xy = 1+a$ et dans ce cas puisque $(xy)^2 + x^2 - axy = 0$, on voit que $x^2 = (1-a)(1+a) < 0$, ce qui n'est pas possible. C'est-à-dire que les points extremaux de f sont $(0,0)$, $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$. Or comme

$$f(0,0) = 0 \geq -(a-1)^2 = f(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}) = f(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}),$$

on voit que le minimum de f vaut $-(a-1)^2$ et est atteint en $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ et $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$.

Exercice 80

Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue.

(b) Déterminer les extrema de f.

Solution:

(a) Il est clair que f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme produit de fonctions continues. Pour montrer la continuité en $\{(0,0)\}$, on se donne une suite $((x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ qui converge vers $(0,0)$, c'est-à-dire telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient des suites positives convergeant vers 0. En utilisant les inégalités $uv \leq \dfrac{1}{2}(u^2+v^2)$ et $u+v \geq \sqrt{u^2+v^2}$, valables si u et v sont positifs, on voit que

$$\begin{aligned}
|f(x_n,y_n)| &\leq \frac{x_n y_n}{x_n+y_n} \\
&\leq \frac{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{x_n^2+y_n^2}.
\end{aligned}$$

Il est clair que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, c'est suffisant pour conclure que la limite de la suite $(f(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 et donc que f est continue en $(0,0)$.

(b) Comme la fonction f est positive, on voit que f admet un minimum, à savoir 0, qui est atteint si $x=0$ ou $y=0$. Pour chercher les maxima de f, il faut commencer par étudier le comportement de f en $+\infty$. Mais

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)(x+y)} \\
&\leq \frac{1}{x+y},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que f tend vers 0 lorsque $(x,y) \to +\infty$. Plus précisément, on remarque que $f(1,1) = 1/8$, or si $x+y \geq 8$ alors $f(x,y) \leq 1/8$. En conséquence,

$$\sup_{(\mathbb{R}_+)^2} f = \sup_{\{x,y\geq 0 \text{ et } x+y\leq 8\}} f(x,y).$$

Mais comme f est continue et que $\{x,y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 8\}$ est un compact, on voit que le supremum du membre de droite est un maximum : le supremum de f sur $(\mathbb{R}_+)^2$ est donc atteint. Pour déterminer le ou les points où il atteint, il chercher les points d'annulation du gradient de f. Ces points (x,y) sont les solutions du système d'équations (on remarquera que dériver logarithmiquement f peut être utile)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1} - \dfrac{1}{x+y} = 0 \end{cases}.$$

En particulier on voit que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}.$$

Mais comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{1}{t(t+1)}$ est strictement décroissante dont injective sur $\mathbb{R}_+^\star$, on voit que nécessairement $x = y$. En réinjectant on obtient

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x} = 0,$$

ce qui donne

$$x = y = 1.$$

En conclusion f admet un maximum, atteint uniquement en $(1,1)$ et $\sup_{(\mathbb{R}_+)^2} f = f(1,1) = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 81

Soient $n \geq 1$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(M) = \det(M)$.

(a) Montrer que la différentielle de f en la matrice identité est l'application linéaire trace.

(b) Montrer que si A est une matrice inversible alors $df(A).H = (\det A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$.

Solution:

(a) Le mieux est de calculer les dérivées partielles de f en la matrice identité. Pour cela, on note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si l'on se donne $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, la quantité que l'on cherche à calculer est

$$\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(I_n + tE_{ij}) - f(I_n)}{t}.$$

Mais les matrices apparaissant sur l'expression précédente sont triangulaires, la fonction f se calcule donc très bien :

$$f(I_n + tE_{ij}) = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En conséquence, on voit que

$$\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

À partir de là, on peut bien écrire, pour une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, que

$$\begin{aligned} f(I_n + M) &= f(I_n) + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(I_n) m_{ij} + o(M) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + o(M) \\ &= 1 + \mathrm{Tr}(M) + o(M)\,, \end{aligned}$$

ce qui est exactement ce que l'on voulait montrer, à savoir $df(I_n).M = \mathrm{Tr}(M)$.

(b) Le but est de se ramener, à partir d'une matrice inversible, à un développement limité en I_n : si A est inversible et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f(A + H) &= \det(A + H) \\ &= \det(A)\det(I_n + A^{-1}H) \\ &= (\det A)\left[1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(H)\right] \\ &= (\det A) + (\det A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(H)\,, \end{aligned}$$

et l'on voit que l'on arrive à identifier $df(A)$, puisque l'on peut dire que $df(A).H = (\det A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$.

Exercice 82

(a) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$. Déterminer la différentielle de f.

(b) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $\phi(t) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout t. Montrer que pour tout t, ${}^t(\phi'(t))\phi(t) + {}^t\phi(t)\phi'(t) = 0$.

(c) En déduire que si n est impair, ϕ' n'est jamais inversible.

Solution:

(a) Il suffit de faire un développement limité : si A et H sont deux matrice de taille $n \times n$,

$$\begin{aligned} f(A + H) &= {}^t(A + H)(A + H) \\ &= {}^tAA + {}^tHA + {}^tAH + {}^tHH \\ &= f(A) + {}^tHA + {}^tAH + O\big(H^2\big) \\ &= f(A) + {}^tHA + {}^tAH + o(H)\,. \end{aligned}$$

On reconnaît bien un développement limité, de sorte que $df(A).H = {}^tHA + {}^tAH$.

(b) Comme $\phi(t) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit que la fonction $f \circ \phi$ est constante et égale à I_n. En conséquence, $(f \circ \phi)' = 0$. Il ne reste qu'à calculer la dérivée de cette fonction composée : on a

$$(f \circ \phi)'(t) = df(\phi(t)).\phi'(t).$$

En remplaçant la différentielle de f par l'expression trouvée dans (a), on obtient bien le résultat demandé.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On part de la relation satisfaite par $\phi'(t)$ et $\phi(t)$, que l'on écrit

$$^t(\phi'(t))\phi(t) = -{}^t\phi(t)\phi'(t),$$

puis l'on prend le déterminant de part et d'autre, en s'aidant du fait que $\det \phi(t) = 1$ car $\phi(t) \in O_n$ et

$$\begin{aligned}\det(-\phi'(t)) &= (-1)^n \det \phi'(t) \\ &= -\det \phi'(t)\end{aligned}$$

car n est impair, de sorte que l'on obtient

$$\det \phi'(t) = -\det \phi'(t).$$

Cela signifie que $\det(\phi'(t)) = 0$, et donc que $\phi'(t)$ n'est pas inversible.

Exercice 83

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

(a) Montrer que pour tout $x \neq 0$ et tout h, $df(x).h = \dfrac{h}{\|x\|^2} - 2\dfrac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x$.

(b) En déduire que pour tout x non nul, $\|x\|^2 df(x)$ est une symétrie orthogonale.

Solution:

(a) Si l'on veut s'épargner des calculs des différentielles composées, faire un développement limité est une bonne option : si $x \neq 0$ et $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}f(x+h) &= \frac{x+h}{\|x+h\|^2} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + o(h)} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2}\left(1 + \frac{2}{\|x\|^2}\langle x, h\rangle + o(h)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}(x+h)\left(1 - \frac{2}{\|x\|^2}\langle x, h\rangle + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(x - \frac{2x}{\|x\|^2}\langle x, h\rangle + h + o(h)\right) \\ &= f(x) + \frac{h}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x + o(h)\,.\end{aligned}$$

Et l'on reconnaît dans ce développement limité la différentielle de la fonction f, qui coïncide avec celle de l'énoncé.

(b) On voit que

$$\|x\|^2 df(x).h \;=\; h \;-\; 2 \underbrace{\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}x}_{\text{projection orthogonale de } h \text{ sur } \mathbb{R}x},$$

ce qui montre que $\|x\|^2 df(x)$ est la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}x)^\perp$.

Exercice 84

Soient S la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et P le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à P. Y-a-t-il des points de S en lesquels le plan tangent est confondu avec P ?

Solution: On note $f : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 + z^2$ la fonction dont S est une surface de niveau. En un point $(x, y, z) \in S$, le plan tangent a pour vecteur normal $\mathrm{grad} f(x, y, z)$, c'est-à-dire $2\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$. Pour que le plan tangent soit parallèle à P, il faut et il suffit que ce vecteur normal soit colinéaire à celui de P, à savoir $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est-à-dire qu'il faut et qu'il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x & = 2\lambda \\ y & = -\lambda \\ z & = -\lambda \end{cases}$. Comme il faut de plus que $(x, y, z) \in S$, on voit que λ doit satisfaire l'équation

$$\begin{aligned}(2\lambda)^2 - (-\lambda)^2 + (-\lambda)^2 &= 4\lambda^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$. En conclusion, les points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à P sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comme aucun de ces deux points n'appartient à P, le plan tangent n'est jamais confondu avec P.

Exercice 85

Soient S la surface d'équation $xy = z^3$ et D la droite d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$. Déterminer les points non critiques de S en lesquels le plan tangent à S contient D.

Solution: On note tout d'abord que la droite D a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et qu'elle contient le point $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note ensuite $f : (x, y, z) \mapsto xy - z^3$ la fonction dont S est une surface de niveau. En un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de S, le plan tangent a pour vecteur normal $\mathrm{grad} f(x, y, z)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} y \\ x \\ -3z^2 \end{pmatrix}$. La droite D est incluse dans le plan tangent à S en M si et seulement si le vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal à ce plan (à savoir $\mathrm{grad} f(x, y, z)$) et le point A appartient à ce plan (ce qui peut s'écrire $\overrightarrow{AM} \perp \mathrm{grad} f(x, y, z)$). Donc les points M en lesquels le plan tangent à S contient D vérifient

$$\begin{cases} M \in S & : \; xy = z^3 \\ \vec{u} \perp \mathrm{grad} f(x, y, z) & : \; 3x - 3z^2 = 0 \\ \overrightarrow{AM} \perp \mathrm{grad} f(x, y, z) & : \; (x-2)y + xy - 3(z-1)z^2 = 0 \end{cases}.$$

On peut voir que si $z = 0$ alors $x = 0$ puis $y = 0$ mais $(0, 0, 0)$ est un point critique de S, en conséquence $z \neq 0$. La deuxième équation donne $x = z^2$, puis la première donne $y = z$. La dernière équation se réécrit alors $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$, c'est-à-dire $z^2 - 3z + 2 = 0$ puisque $z \neq 0$. Les deux solutions sont alors $z = 2$ et $z = 1$. On peut alors conclure : il y a deux points non critique de S en lesquels la droite D est incluse dans le plan tangent à S et il s'agit de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 Algèbre

2.1 Révisions de première année

Exercice 86

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Monter que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Solution: À l'aide d'une célèbre formule concernant les coefficients binomiaux on peut écrire

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1},$$

ce qui permet de transformer la somme en question en somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Exercice 87

Soit $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.

Solution: On commence par utiliser l'identité $\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ pour écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(2\frac{k\pi}{n}\right),$$

et l'on peut reconnaître dans le membre de droite la sommes des abscisses des racines n-ièmes de l'unité. L'élève attentif remarquera directement que, puisque $n \geq 2$ cette somme vaut 0, celui qui a besoin de s'en convaincre peut l'écrire comme la partie réelle de la somme des racines n-ièmes de l'unité, et utiliser la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. En conséquence,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{n}{2}.$$

Exercice 88

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction (réelle) définie par $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Solution: Supposons par l'absurde qu'elle ne le soit pas. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$, des réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tous non nuls tels que $\lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Mais on peut réécrire cette identité de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e^{(a_k - a_n)x}.$$

Comme $a_k - a_n < 0$ pour tout $k < n$, en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient que $\lambda_n = 0$, ce qui est une contradiction.

Exercice 89

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction (réelle) définie par $f_a(x) = |x - a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Solution: Supposons par l'absurde qu'elle ne le soit pas. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$, des réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tous non nuls tels que $\lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$, ce qui se réécrit $-\lambda_1 f_{a_1} = \lambda_2 f_{a_2} + \ldots + \lambda_n f_{a_n}$. Mais la fonction $\lambda_2 f_{a_2} + \ldots + \lambda_n f_{a_n}$ est dérivable en a_1 (elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a_2, \ldots, a_n\}$) alors que la fonction $-\lambda_1 f_{a_1}$ ne l'est pas : c'est une contradiction.

Exercice 90

Soient E un espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

Solution: Si $F \subset G$ (respectivement $G \subset F$) alors $F \cup G = G$ (respectivement $F \cup G = F$) donc le sens réciproque est immédiat.
Pour le sens direct on raisonne par contraposée et l'on suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. On peut donc trouver $x \in F\backslash G$ et $y \in G\backslash F$. On montre alors que $z = x + y$ n'est pas un élément de $F \cup G$ (comme x et y appartiennent à $F \cup G$, c'est suffisant pour montrer que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel). En effet, z ne peut appartenir à F puisque sinon $z - x$, c'est-à-dire y, y appartiendrait aussi et ce n'est pas possible par hypothèse. De la même manière on vérifie que z ne peut appartenir à G.

Exercice 91

Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(b) On suppose que $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$. Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Solution:

(a) Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ donc $u(x) + v(x) \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
Mais si l'on suppose que u est non nul et si l'on prend $v = -u$, alors $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$ tandis que $u + v = 0$, donc $\mathrm{Im}(u + v) = \{0\}$: dans ce cas l'inclusion est stricte.

(b) Soit z un élément quelconque de $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. On peut donc trouver x et $y \in E$ tels que $z = u(x) + v(y)$. On décompose $x = x_u + x_v$ et $y = y_u + y_v$ où $x_u, y_u \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x_v, y_v \in \mathrm{Ker}(v)$. Puisque $u(x) = u(x_v)$ et $v(y) = v(y_u)$, on peut vérifier que $z = u(w) + v(w)$, où $w = x_v + y_u$.

Exercice 92

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. On note Δ l'endomorphisme de E tel que $\Delta(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

(a) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\Delta(E_n) \subset E_{n-2}$.

(b) Calculer $\mathrm{Ker}(\Delta)$. En déduire que $\Delta : E \to E$ est surjective.

(c) On note $\hat{E} = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\Delta : \hat{E} \to E$ est bijective.

Solution:

(a) Par linéarité de Δ, il suffit de vérifier que $\Delta(X^n) \in E_{n-2}$. Il suffit de faire la calcul

$$\begin{aligned}
\Delta(X^n) &= (X + 1)^n + (X - 1)^n - 2X^n \\
&= X^n + nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k + X^n - nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-X)^k - 2X^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-X)^k \\
&\in E_{n-2}.
\end{aligned}$$

(b) Clairement $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $P(X + 1) + P(X - 1) = 2P(X)$, ce que l'on peut réécrire $P(X + 1) - P(X) = P(X) - P(X - 1)$. En notant $Q(X)$ le polynôme $P(X + 1) - P(X)$, on voit que $Q(X) = Q(X - 1)$. Le polynôme Q prend donc la même valeur sur tous les entiers, c'est-à-dire coïncide avec un polynôme constant sur les entiers. Comme il y a une infinité d'entiers, on en déduit que Q est un polynôme constant, on le note $Q = a$. Mais à partir de là $P(X+1) = a+P(X)$, donc P coïncide avec un polynôme de degré 1 sur les entiers, donc est un polynôme de degré 1. On vérifie alors que tout polynôme de degré 1 est annulé par Δ, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\Delta) = E_1$.

Comme E_1 est de dimension 2, le théorème du rang permet de voir que $\dim(\Delta(E_n)) = n+1-2 = n-1$. Mais par ailleurs on sait (cf. (a)) que $\Delta(E_n) \subset E_{n-2}$ et E_{n-2} est de dimension $n-1$, donc $\Delta(E_n) = E_{n-2}$. Pour $n \geq 2$, on a donc l'inclusion $E_{n-2} \subset \Delta(E)$, comme n est arbitraire $E = \Delta(E)$, c'est-à-dire que Δ est surjective.

(c) L'observation cruciale est que $\hat{E} \cap \mathrm{Ker}(\Delta) = \{0\}$. En effet un polynôme dans $\mathrm{Ker}(\Delta)$, c'est-à-dire de degré au plus 1, ne peut s'annuler à la fois en 0 et en 1 à moins d'être identiquement nul.

En particulier, $\Delta : \hat{E} \to E$ est injective.

Pour la surjectivité, on se donne $P \in E$ et $Q \in E$ tel que $\Delta(Q) = P$ (un tel Q existe par (b)). On note R l'unique polynôme de degré au plus 1 tel que $R(0) = Q(0)$ et $R(1) = Q(1)$. On vérifie alors que $Q - R \in \hat{E}$ et, comme $R \in E_1 = \mathrm{Ker}(\Delta)$, on voit que $\Delta(Q-R) = P$: c'est suffisant pour conclure à la surjectivité de $\Delta : \hat{E} \to E$.

Exercice 93

On note $E = K^n$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de E. Montrer que $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(K)$.

Solution: On va présenter deux méthodes pour cet exercice, commençons par la plus calculatoire : on se donne des scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et l'on suppose que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} X_i{}^tY_j = 0$$

En réordonnant la somme, on en vient à

$$\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}{}^tY_j \right) = 0.$$

Pour pouvoir utiliser la liberté de la famille $(X_1, \dots, X_n)$, il faut s'y prendre avec précaution. En notant $Y_j^1, Y_j^2, \dots, Y_j^n$ les coordonnées de Y_j, on voit que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} Y_j^k \right) X_i = 0,$$

donc on peut utiliser la liberté de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ et dire que les scalaires $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} Y_j^k$ sont nuls pour tout i et pour tout k. En particulier, cela veut dire que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} Y_j = 0.$$

Donc à i fixé, à cause de la liberté de la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ on doit avoir $\lambda_{i,1} = \lambda_{i,2} = \ldots = \lambda_{i,n} = 0$. Comme i est arbitraire, cela montre que les $\lambda_{i,j}$, pour $1 \leq i,j \leq n$ sont nuls, et donc que la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre. Comme elle est de cardinal n^2, c'est bien une base de $\mathcal{M}_n(K)$.

La deuxième méthode est dans la veine de l'adage (bien connu ?) « un problème d'algèbre linéaire, c'est une question triviale mais posée dans la mauvaise base ».

Notons $E_1, E_2, \dots, E_n$ la base canonique de K^n. On se donne deux matrices inversibles P et Q telles que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on ait $PX_i = E_i$ et $QY_i = E_i$ (de telles matrices existent car $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de K^n). En notant $M_{i,j}$ la matrice $X_i{}^tY_j$, on peut calculer matriciellement et voir que $PM_{i,j}{}^tQ = E_i{}^tE_j$. Mais il se trouve que $(E_i{}^tE_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ n'est autre que la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$: à un changement de base près (qui se manifeste ici par la multiplication à gauche par P et à droite par ${}^tQ$), $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$!

Exercice 94

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\mathcal{L}_V(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \text{ tels que } V \subset \mathrm{Ker}(u)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Solution: On peut vérifier à la main que $\mathcal{L}_V(E,F)$ est un sous-espace vectoriel, mais on pourra aussi remarquer que c'est le noyau de l'application $\mathcal{L}(E,F) \ni u \mapsto u|_V \in \mathcal{L}(V,F)$ de restriction à V.

Pour calculer la dimension, on se donne W un supplémentaire de V dans E. Une première méthode est de montrer que l'application $\phi : \mathcal{L}_V(E,F) \ni u \mapsto u|_W \in \mathcal{L}(W,F)$ de restriction à W est bijective. Pour l'injectivité, on voit que si $\phi(u)=0$ alors u s'annule sur W mais puisque de plus $u \in \mathcal{L}_V(E,F)$, u s'annule sur V donc u s'annule sur $V+W=E$. Pour la surjectivité, si $v \in \mathcal{L}(W,F)$ alors la fonction u qui coïncide avec v sur W et qui s'annule sur V est bien définie sur $V+W=E$, elle appartient à $\mathcal{L}_V(E,F)$ et $\phi(u)=v$. En conclusion, $\mathcal{L}_V(E,F)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(W,F)$ donc

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}_V(E,F)) &= \dim(\mathcal{L}(W,F))\\ &= \dim(W)\dim(F)\\ &= (\dim(E)-\dim(V))\dim(F).\end{aligned}$$

L'autre méthode est de raisonner matriciellement. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $V+W$, où W est un supplémentaire de V dans E, une application u appartient à $\mathcal{L}_V(E,F)$ si et seulement si matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}^{V}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{\star \cdots \star}}^{W}} \\ 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \end{array}\right).$$

Le choix des coefficients $\star$ est libre, comme il y en a $\dim(W)\dim(F)$, la dimension de $\mathcal{L}_V(E,F)$ est $(\dim(E)-\dim(V))\dim(F)$.

Exercice 95

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est surjective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Solution: Pour le sens réciproque, s'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors pour tout $x \in F$, $f(g(x)) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.
Pour le sens direct, soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. On sait que f réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f) = F$. On note alors $g : F \to S$ la réciproque de cet isomorphisme. En particulier pour tout $x \in F$, $f(g(x)) = x$: c'est exactement ce qui est demandé.

Exercice 96

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\begin{array}{cccc}\phi_u : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & v & \mapsto & u \circ v\end{array}.$$

Calculer l'image, le noyau et le rang de ϕ_u.

Solution: De manière générale, le noyau d'une application linéaire est plus simple à calculer, et c'est le cas ici. En effet, comme $u \circ v = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on voit que

$$\mathrm{Ker}(\phi_u) = \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u)) \subset \mathcal{L}(E,E).$$

Pour calculer la dimension, on utilise le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\phi_u) &= \dim(\mathcal{L}(E)) - \dim \mathrm{Ker}(\phi_u)\\ &= (\dim E)^2 - \dim \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))\\ &= (\dim E)^2 - (\dim E)(\dim \mathrm{Ker}(u))\\ &= (\dim E)(\dim E - \dim \mathrm{Ker}(u))\\ &= (\dim E)(\mathrm{rg} u).\end{aligned}$$

Et pour l'image, on remarque que $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$, de sorte que $\mathrm{Im}(\phi_u) \subset \mathcal{L}(E, \mathrm{Im}(u))$. Mais d'après ce qui précède $\mathcal{L}(E, \mathrm{Im}(u))$ a une dimension égale au rang de ϕ_u, l'inclusion est donc une égalité :

$$\mathrm{Im}(\phi_u) = \mathcal{L}(E, \mathrm{Im}(u)).$$

Exercice 97

Soient n un entier naturel et $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$ $n+1$ réels distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\omega_i.$$

Solution: Il faut comprendre que c'est un problème d'algèbre linéaire ! On note $\phi : P \mapsto \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note ϕ_i la forme linéaire $P \mapsto P(x_i)$. Or la famille $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est libre. En effet, s'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_0\phi_0 + \lambda_1\phi_1 + \ldots + \lambda_n\phi_n = 0$, en évaluant le membre de gauche sur le polynôme qui vaut 1 en x_i et 0 en x_j pour $j \neq i$, on trouve $\lambda_i = 0$. Comme la famille $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est de cardinal $n+1$ ce qui coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, elle forme une base de l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$. En conclusion, les $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les coordonnées de la forme linéaire ϕ dans la base $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Exercice 98

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

Solution: La formulation « Montrer [...] qu'il existe un unique » doit faire penser, puisque l'on est dans le cadre d'un problème linéaire, qu'il faut montrer qu'une certaine application linéaire est bijective. Plus précisément, on note $\Phi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ et $E_n = \{P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(0) = 0\}$. Il est clair que l'application Φ est linéaire et que E_n est un espace vectoriel de dimension $n+1$ (une base de E_n est par exemple $(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$). De plus, comme Φ abaisse le degré, on voit que $\Phi(E_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

La question par l'énoncé peut maintenant se reformuler de la façon suivante : montrer que l'équation $\Phi(P) = X^n$ admet une unique solution $P \in E_n$. En particulier, il suffit de montrer que $\Phi : E_n \to \mathbb{R}_n[X]$ est bijective. Mais comme E_n et $\mathbb{R}_n[X]$ ont la même dimension, il suffit de montrer que Φ est injective, c'est-à-dire que son noyau est réduit au polynôme nul. Or si $\Phi(P) = 0$ et $P \in E_n$, comme $P(k+1) = P(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $P(0) = 0$, on voit que $P(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme P admet donc une infinité de racines, ce qui montre qu'il est nul.

En conclusion, le noyau de Φ est réduit au polynôme nul, c'est-à-dire que $\Phi : E_n \to \mathbb{R}_n[X]$ est injective et donc bijective, de sorte qu'il existe un unique $P_n \in E_n$ tel que $\Phi(P_n) = X^n$.

2.2 Polynômes et nombres complexes

Exercice 99

Soit $n \geq 1$, on note $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(a) Calculer le produit des n racines n-ièmes de l'unité.

(b) Si $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Solution:

(a) En notant q le produit des racines n-ièmes de l'unité, on voit que l'argument de q vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n} = (n-1)i\pi$. En conséquence, q vaut 1 si n est impair, -1 sinon. On peut aussi utiliser les relations coefficients-racines, puisque q est égal au produit de $(-1)^n$ par le terme constant du polynôme $X^n - 1$.

(b) On reconnaît la somme des termes d'une somme géométrique de raison ω^p. Si p est un multiple de n, alors $\omega^n = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = n$ et sinon,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} &= \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p} \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque ω est une racine n-ième de l'unité donc $\omega^{np} = 1$.

(c) On développe selon la formule de binôme de Newton et on permute l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\omega^{kp} \\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp} \\ &= n\binom{n}{0} + n\binom{n}{n} \\ &= 2n,\end{aligned}$$

puisque seulement deux valeurs de p contribuent à la somme : pour $p = 0$ et $p = n$.

Exercice 100

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour qu'une des racines de P soit égale au produit des deux autres.

Solution: On note z_1, z_2 et z_3 les racines de P et on rappelle que grâce aux relations coefficients-racines,

$$\begin{cases} z_1 = z_2 + z_3 & = -a \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 & = b \\ z_1z_2z_3 & = -c \end{cases}.$$

On suppose que l'une des racines soit produit des deux autres, par exemple $z_1 = z_2z_3$. À partir de là on en déduit que $z_1(1 + z_2 + z_3) = b$, mais comme $z_2 + z_3 = -a - z_1$ on trouve $z_1(1 - a) = b + z_1^2$. On élève cette identité au carré, et puisque l'on remarque que $z_1^2 = -c$, on obtient $c(1 - a)^2 = -(b - c)^2$: c'est une condition nécessaire.
Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de « remonter » les identités précédentes : on suppose donc que $c(1-a)^2 = -(b - c)^2$. Au vu de ce qui précède, on définit $z_1 = \dfrac{b - c}{1 - a}$ de sorte que $z_1^2 = -c$. Puis l'on définit z_2 et z_3 comme les racines du polynôme $X^2 + (a + z_1)X + z_1$: par le relations coefficients-racines, elles vérifient

$$\begin{cases} z_2 + z_3 & = -a - z_1 \\ z_2z_3 & = z_1 \end{cases}.$$

Les identités $z_1 + z_2 + z_3 = -a$ et $z_1z_2z_3 = z_1^2 = -c$ sont immédiates, et l'on peut vérifier que

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 &= z_1(1 + z_2 + z_3) \\ &= z_1(1 - a - z_1) \\ &= z_1(1 - a) + c \\ &= b - c + c \\ &= b \end{aligned}$$

de sorte que le triplet (z_1, z_2, z_3) vérifie les bonnes relations coefficients-racines et est donc racine de P, de plus $z_1 = z_2z_3$ par construction. L'élève attentif aura remarqué que cette méthode ne marche pas si $a = 1$, mais dans ce cas la condition nécessaire impose $b = c$ et il suffit de prendre pour z_1 une des deux racines carré de $-c$ et de définir z_2 et z_3 comme précédemment.
En conclusion, une racine de P est produit des deux autre si et seulement si $c(1 - a)^2 = -(b - c)^2$.

Exercice 101

(a) Montrer que si P est un polynôme réel scindé à racines simples, alors P' l'est aussi.

(b) Soit P un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, toute racine de $P - c$ est au plus double.

Solution:

(a) Soit P un polynôme scindé à racines simples de degré n, on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ses racines (ordonnées). Par le théorème de Rolle, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, la fonction polynomiale P' s'annule en un point y_i de $]x_i\,, x_{i+1}[$. Le polynôme P' admet donc $n-1$ racines distinctes $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$, comme il est de degré $n-1$ ce sont les seules, de sorte qu'il est scindé à racines simples.

(b) On suppose par l'absurde qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que x soit racine au moins triple de $P - c$. Cela signifie que x est racine au moins double de $(P-c)' = P'$, mais cela contredit le fait que P' est scindé à racines simples (puisque P l'est).

Exercice 102

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que le polynôme P^2+1, vu comme un élément de $\mathbb{C}[X]$, est aussi scindé à racines simples.

Solution: Il est clair que toutes les racines du polynôme P^2+1 sont complexes (car $P^2+1>0$ sur $\mathbb{R}$). Il suffit donc de montrer que les racines de $(P^2+1)' = 2P'P$ sont réelles. Mais comme P est scindé à racines simples, il en est de même pour P' (c'est une application classique du théorème de Rolle). Donc, en notant n le degré de P, le polynôme P' compte bien $n-1$ racines réelles, distinctes des racines de P. En particulier, le polynôme $2P'P$ compte $2n-1$ racines réelles distinctes, et par degré ce sont bien les seules. C'est donc suffisant pour conclure.

Exercice 103

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Solution: Un nombre complexe z est racine de P si et seulement si z^n est racine de $Q = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, c'est-à-dire si et seulement si $z^n \in \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$. On rappelle que pour résoudre l'équation $z^n = e^{i\theta}$, on écrit

$$\begin{aligned} z^n = e^{i\theta} &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\theta/n}}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow ze^{-i\theta/n} \text{ racine } n\text{-ième de l'unité} \\ &\Leftrightarrow ze^{-i\theta/n} \in \left\{e^{2ik\pi/n};\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\} \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{e^{(2ik\pi+\theta)/n};\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}. \end{aligned}$$

Fort de cette observation, on peut écrire que l'ensemble des racines de P est

$$\left\{e^{(2ik\pi+\theta)/n};\ k = 0, 1, \ldots, n\right\} \cup \left\{e^{(2ik\pi-\theta)/n};\ k = 0, 1, \ldots, n\right\}.$$

Si $\theta \notin \{0, \pi\}$ alors il y a $2n$ racines donc, P étant unitaire, sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{(2ik\pi+\theta)/n}\right)\left(X - e^{(2ik\pi-\theta)/n}\right).$$

Dans les cas $\theta \in \{0, \pi\}$, on peut vérifier à la main que la factorisation ci-dessus est la bonne.

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il faut regrouper ensemble les racines qui sont conjuguées. Or, on voit que $\overline{e^{(2ik\pi+\theta)/n}} = e^{(2ik'\pi-\theta)/n}$ où l'on note $k' = n-k$ si $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et $0' = 0$, de sorte que

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{(2ik\pi+\theta)/n}\right)\left(X - e^{(-2ik\pi-\theta)/n}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2ik\pi+\theta}{n}\right)X + 1\right). \end{aligned}$$

C'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 104

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout θ réel, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

(b) Quelles sont les racines de P_n ?

(c) Soient n et m entiers. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n et m pour que P_n divise P_m.

Solution:

(a) Consulter son cours sur les polynômes de Tchebychev.

(b) À l'aide de l'identité $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on vérifie que les $x_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont des racines de P_n. Lorsque k parcourt $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, les $x_{k,n}$ sont deux à deux distincts, et comme il y en a n (le degré de P_n), ce sont les racines de P_n.

(c) Comme les polynômes P_n et P_m sont scindés à racines simples, P_n divise P_m si et seulement si l'ensemble des racines de P_n est inclus dans l'ensemble des racines de P_m. Si P_n divise P_m, $x_{0,n}$ est une racine de P_m c'est-à-dire qu'il existe $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tel que $x_{0,n} = x_{k,m}$, ou pour l'écrire autrement,

$$\frac{\pi}{2n} = \frac{(2k+1)\pi}{2m},$$

ce qui se réécrit

$$m = (2k+1)n,$$

c'est-à-dire que m est un multiple impair de n.

Réciproquement, si $m = (2k+1)n$, on vérifie que $x_{l,n} = x_{2kl+k+l,m}$, de sorte que toute racine de P_n est racine de P_m.

En conclusion, P_n divise P_m si et seulement si $m \in (2\mathbb{Z}+1)n$.

2.3 Réduction des endomorphismes

Exercice 105

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB = BA$. Montrer que si F est un sous-espace propre de A, alors $B(F) \subset F$.

Solution: Soit $X \in F$ et λ la valeur propre associée à X, de sorte que $AX = \lambda X$. Alors

$$\begin{aligned} A(BX) &= BAX \\ &= B(AX) \\ &= B(\lambda X) \\ &= \lambda(BX), \end{aligned}$$

ce qui montre que $BX \in F$.

Exercice 106

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire vérifiant $u^n = 0$.

(a) Montrer que toute valeur propre de u est nulle.

(b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $u = 0$.

Solution:

(a) Soit λ une valeur propre de u, et x un vecteur propre associé. On vérifie que $u^n(x) = \lambda^n x$. Comme x est non nul, cela signifie que $\lambda^n = 0$, donc $\lambda = 0$.

(b) D'après (a), la somme de la dimension de sous-espaces propres de u est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$. Donc u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension n, c'est-à-dire si et seulement si $u = 0$.

Exercice 107

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $AB = BA$. On veut montrer que A et B sont cotrigonalisables (c'est-à-dire qu'elles se trigonalisent à l'aide de la même matrice de passage).

(a) Montrer que A stabilise les sous-espaces propres de B.

(b) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

(c) Conclure.

Solution:

(a) Soit λ une valeur propre de B, E_λ le sous-espace propre associé et $X \in E_\lambda$. Alors

$$\begin{aligned} B(AX) &= BAX \\ &= A(BX) \\ &= A(\lambda X) \\ &= \lambda(AX), \end{aligned}$$

ce qui montre que $AX \in E_\lambda$: le sous-espace propre E_λ est stable par A.

(b) Soit λ une valeur propre de B (une telle valeur propre existe car sur $\mathbb{C}$ tout polynôme est scindé donc χ_B a au moins une racine) et E_λ le sous-espace propre associé. Par (a), on peut définir $\hat{A} : E_\lambda \to E_\lambda$ comme la restriction de A à E_λ. Mais $\hat{A}$ est alors un endomorphisme de E_λ, qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, en conséquent $\hat{A}$ possède au moins un vecteur propre $X \in E_\lambda$. Il est clair que X est aussi un vecteur propre de A (car $\hat{A}$ est la restriction de A), et comme $X \in E_\lambda$, c'est un vecteur propre de B.

(c) On montre la propriété demandée (deux matrices complexes carrées de taille $n \times n$ qui commutent sont cotrigonalisables) par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est trivial, on suppose la propriété vraie pour $n-1$, et l'on se donne $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Par (b), A et B possèdent un vecteur propre commun X. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^n$ dont X est le premier vecteur, en notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_A & L_A \\ \hline 0 & C_A \end{array}\right) \text{ et } P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_B & L_B \\ \hline 0 & C_B \end{array}\right),$$

où λ_A, λ_B sont des scalaires, L_A, L_B sont des vecteurs lignes de taille $n-1$ et C_A, C_B sont des matrices carrées de taille $(n-1) \times (n-1)$. Mais en calculant par bloc, on peut voir que la condition $AB = BA$ se traduit en $C_A C_B = C_B C_A$. Donc, par hypothèse de récurrence, les matrices C_A et C_b sont cotrigonalisables. Notons $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ une matrice de passage qui les cotrigonalise, c'est-à-dire telle que $(P')^{-1}C_A P'$ et $(P')^{-1}C_B P'$ soient triangulaires supérieures. On peut alors vérifier, en notant

$$P'' = P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right) \in GL_n(\mathbb{C}),$$

que

$$(P'')^{-1}AP'' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_A & L_A P' \\ \hline 0 & (P')^{-1}C_A P' \end{array}\right) \text{ et } (P'')^{-1}BP'' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_B & L_B P' \\ \hline 0 & (P')^{-1}C_B P' \end{array}\right),$$

ce qui montre que la matrice de passage P'' trigonalise à la fois A et B.

Exercice 108

Soient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$ telles que $AB = BA$. On suppose de plus que A possède n valeurs propres distinctes.

(a) Montrer que B stabilise les sous-espaces propres de A.

(b) Montrer que A et B sont codiagonalisables.

(c) Montrer que B est un polynôme en A.

Solution:

(a) Soit λ une valeur propre de A, E_λ le sous-espace propre associé et $X \in E_\lambda$. Alors

$$\begin{aligned} A(BX) &= ABX \\ &= B(AX) \\ &= B(\lambda X) \\ &= \lambda(BX), \end{aligned}$$

ce qui montre que $BX \in E_\lambda$: le sous-espace propre E_λ est stable par B.

(b) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres associée. Pour tout $i \in \{1, 2 \dots, n\}$, comme $BX_i \in E_{\lambda_i} = \mathbb{C}X_i$, on voit qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $BX_i = \mu_i X_i$: le vecteur X_i est un vecteur propre de B. En conclusion, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de A et de B : les matrices A et B sont codiagonalisables.

(c) Comme dans (b), notons $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de B associées aux vecteurs propres $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On note Q le polynôme d'interpolation de Lagrange (de degré $n-1$) tel que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on ait $Q(\lambda_i) = \mu_i$ (il faut remarquer qu'il est ici important que les λ_i soient distincts). En notant P la matrice de passage de la base canonique à $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on a

$$\begin{aligned} P^{-1}Q(A)P &= Q(P^{-1}AP) \\ &= \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & & \\ & Q(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}BP. \end{aligned}$$

En simplifiant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient $Q(A) = B$, ce qui est le résultat demandé.

Exercice 109

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes sur E. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si v stabilise les sous-espaces propres de u.

Solution: Pour le sens direct, on se donne λ une valeur propre de u et l'on note E_λ le sous-espace propre de u associé. Alors, si $x \in E_\lambda$,

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= v(u(x)) \\ &= v(\lambda x) \\ &= \lambda v(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $v(x) \in E_\lambda$.

Pour le sens réciproque, notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés. Si $x \in E$, on note $x_1 \in E_{\lambda_1},\ x_2 \in E_{\lambda_2}, \ldots, x_p \in E_{\lambda_p}$ les vecteurs tels que $x = x_1 + x_2 + \ldots x_p$. Par hypothèse $v(x_i) \in E_{\lambda_i}$ donc $u(v(x_i)) = \lambda_i v(x_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Il suffit alors de faire le calcul :

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= u(v(x_1)) + u(v(x_2)) + \ldots + u(v(x_p)) \\ &= \lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2) + \ldots + \lambda_p v(x_p), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p) \\ &= \lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2) + \ldots + \lambda_p v(x_p). \end{aligned}$$

On voit bien que ces deux expressions coïncident, et comme x est arbitraire, cela suffit pour conclure que $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 110

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Solution: À un changement de base près, une matrice diagonalisable est diagonale, regardons donc d'abord ce qui se passe dans le cas où A est diagonale. On note alors $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sa diagonale. En notant E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, on peut calculer que $\Phi(E_{ij}) = \lambda_i E_{ij}$. Les E_{ij} forment une base dans lorsque (i,j) parcourt $\{1, 2, \ldots, n\}^2$, en conséquence Φ est diagonalisable, ses valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Vect}(E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in})$.

Dans le cas général, notons P une matrice de passage telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la diagonale de D. Alors

$$\begin{aligned} P^{-1}\Phi(M)P &= P^{-1}AMP \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) \\ &= D(P^{-1}MP). \end{aligned}$$

Mais d'après le calcul fait dans le cas diagonal, on sait que si $P^{-1}MP = E_{ij}$ alors $D(P^{-1}MP) = \lambda_i E_{ij}$ et donc

$$P^{-1}\Phi(M)P = \lambda_i E_{ij},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \lambda_i P E_{ij} P^{-1} \\ &= \lambda_i M. \end{aligned}$$

À partir de là, on voit que les valeurs propres de Φ sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Vect}(PE_{i1}P^{-1}, PE_{i2}P^{-1}, \dots, PE_{in}P^{-1})$.
Pour résumer, la philosophie est, *via* un changement de base, de se ramener au cas diagonal pour lequel l'exercice est beaucoup plus simple.

Exercice 111

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, on note $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Donner les valeurs propres de B et les sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Solution: On cherche à résoudre l'équation $BX = \lambda X$, d'inconnue $(X, \lambda) \in \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}$. On raisonne par bloc et l'on note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1 et $X_2 \in \mathbb{C}^n$. L'équation $BX = \lambda X$ s'écrit alors

$$\begin{cases} AX_2 &= \lambda X_1 \\ X_1 &= \lambda X_2 \end{cases},$$

système d'équation qui est équivalent à

$$\begin{cases} AX_2 &= \lambda^2 X_2 \\ X_1 &= \lambda X_2 \end{cases}.$$

En particulier, on voit que λ est une valeur propre de B si et seulement si λ^2 est une valeur propre de A. On peut donc expliciter le spectre de B :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

De plus, si on se donne $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, on voit que le sous-espace propre E^B_λ de l'endomorphisme B associé à la valeur propre λ est

$$E^B_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} ;\ X_2 \in E^A_{\lambda^2} \right\}.$$

En particulier, la dimension de E^B_λ est la même que $E^A_{\lambda^2}$.

On calcule la somme des dimensions des sous-espaces propres de B, en prenant garde à distinguer le cas $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ (car 0 ne possède qu'une seule racine carré, au contraire de tous les autres nombres complexes qui en possèdent deux).

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim E_\lambda^B &= \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \sum_{\lambda \text{ tel que } \lambda^2=\mu} \dim E_\lambda^B \\
&= \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \sum_{\lambda \text{ tel que } \lambda^2=\mu} \dim E_\mu^A \\
&= \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} [\text{nombre de racines carrées de } \mu] \times \dim E_\mu^A \\
&= \begin{cases} 2\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\mu^A & \text{si } 0 \notin \mathrm{Sp}(A) \\ \left(2\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)\cap\mathbb{C}^*} \dim E_\mu^A\right) + \dim E_0^A & \text{si } 0 \in \mathrm{Sp}(A) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Or comme A est diagonalisable on sait que $\displaystyle\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\mu^A = n$. On voit donc que c'est seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim E_\lambda^B = 2n$. En conclusion, B est diagonalisable si et seulement si A est injective.

Exercice 112

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application qui à toute matrice M de lignes $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ associe la matrice dont les lignes sont $(L_2, L_3, \dots, L_n, L_1)$. Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses éléments propres.

Solution: On se donne une matrice M non nulle, dont les lignes sont $(L_1, L_2, \dots, L_n)$, et l'on cherche à résoudre l'équation $\Phi(M) = \lambda M$. Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} L_2 &= \lambda L_1 \\ L_3 &= \lambda L_2 \\ \vdots &= \vdots \\ L_1 &= \lambda L_n \end{cases}.$$

On en déduit que $L_1 = \lambda^n L_1$. Or si L_1 est nulle, ce sont toutes les autres lignes qui sont nulles ce qui contredit $M \neq 0$. On en déduit donc $\lambda^n = 1$, c'est-à-dire que λ est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, si λ est une racine n-ième de l'unité, alors pour tout vecteur ligne L non nul, la matrice de vecteurs lignes $(L, \lambda L, \lambda^2 L, \dots, \lambda^{n-1}L)$ est bien un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ.

En conclusion,

$$\mathrm{Sp}(\Phi) = \left\{ e^{2ik\pi/n};\ 0 \le k \le n-1 \right\}$$

et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ alors

$$E_\lambda = \left\{ (L, \lambda L, \dots, \lambda^{n-1}L);\ L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C}) \right\}.$$

L'endomorphisme Φ possède n valeurs propres, chacune ayant un sous-espace propre associé de dimension n : la somme des dimensions des sous-espaces propres est n^2, ce qui coïncide avec $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que Φ est bien diagonalisable.

Exercice 113

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Déterminer les vecteurs propres et sous-espaces propres de A.

(b) A est elle diagonalisable ?

Solution:

(a) On calcule « à la main ». On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et l'on cherche à résoudre $AX = \lambda X$. Cela s'écrit

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ (\lambda - 1)x_2 & = x_1 \\ (\lambda-1)x_3 & = x_1 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ (\lambda-1)x_n & = x_1, \end{cases}$$

donc si $\lambda \neq 1$, on peut réécrire ce système

$$\begin{cases} \left((1-\lambda) + \dfrac{n-1}{\lambda-1}\right) x_1 & = 0 \\ x_i & = \dfrac{x_1}{\lambda-1} \ \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}.$$

Afin que $X \neq 0$, il faut et il suffit que $x_1 \neq 0$ mais dans ce cas $\left((1-\lambda) + \dfrac{n-1}{\lambda-1}\right) = 0$, c'est-à-dire $(\lambda-1)^2 = n-1$, ce qui s'écrit $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$. On vient d'obtenir deux valeur propres et on connaît les sous-espaces propres associés :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1},\ E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ (n-1)^{-1/2} \\ \vdots \\ (n-1)^{-1/2} \end{pmatrix} \text{ et } \lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1},\ E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -(n-1)^{-1/2} \\ \vdots \\ -(n-1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Mais il ne faut pas oublier le cas $\lambda = 1$. Dans ce cas, $AX = X$ se réécrit

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases},$$

et l'on voit donc que 1 est valeur propre avec un sous-espace propre associé de dimension $n-2$:

$$\lambda_3 = 1,\ E_{\lambda_3} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

(b) E_{λ_1} et E_{λ_2} sont de dimension 1, tandis que E_{λ_3} est de dimension $n-2$: la somme de la dimension des sous-espaces propres est n, donc la matrice A est diagonalisable.

Exercice 114

Soient a et b deux réels et $n \geq 2$ un entier, on note

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

Solution:

(a) Le polynôme caractéristique de A prend la forme suivante

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b & \cdots & -b \\ -b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

Pour le calculer, on suppose que $x \neq a$ et l'on effectue les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + \dfrac{b}{x-a} C_k$ pour $k = 2, 3, \ldots, n$ (C_i désigne la i-colonne de la matrice A) de sorte à annuler les $-b$ de la première colonne. On arrive alors à

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \left[x - a - \dfrac{(n-1)b^2}{x-a}\right] & -b & \cdots & -b \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

Mais c'est une matrice triangulaire supérieure, donc on le déterminant se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \left(x - a - \frac{(n-1)b^2}{x-a}\right)(x-a)^{n-1} \\ &= (x-a)^{n-2}((x-a)^2 - (n-1)b^2) \\ &= (x-a)^{n-2}(x-\lambda_1)(x-\lambda_{-1}), \end{aligned}$$

avec $\lambda_1 = a + b\sqrt{n-1}$ et $\lambda_{-1} = a - b\sqrt{n-1}$. Certains pourraient s'inquiéter que l'on a supposé $x \neq a$, mais on sait que χ_A est un polynôme, connaître sa valeur sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ revient à la connaître partout, et donc l'expression que l'on a trouvée est bien valable pour $x \in \mathbb{R}$.
Le cas $b = 0$ étant trivial (A est alors diagonale), on supposera dans la suite $b \neq 0$ et donc $a, \lambda_1, \lambda_{-1}$ sont trois valeurs propres distinctes.
Le seul obstacle à la diagonalisabilité de A provient de E_a (car λ_1 et λ_{-1} sont des racines simples de χ_A donc les sous-espaces propres associés sont de dimension exactement 1) : il faut vérifier que $\dim(E_a) = n-2$. Mais on voit facilement que $A - aI_n$ est une matrice dont l'image est de dimension 2 (les $n-1$ dernière colonnes de $A - aI_n$ sont identiques) donc, par le théorème du rang, dont le noyau est de dimension $n-2$. Cela veut exactement dire que $\dim(E_a) = n-2$. En conclusion, A est diagonalisable.

(b) Il faut résoudre $AX = \lambda X$, d'inconnue $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour $\lambda \in \{a, \lambda_1, \lambda_{-1}\}$. Pour $\lambda = \lambda_1$, cette équation s'écrit

$$\begin{cases} (a-\lambda_1)x_1 + b(x_2 + x_3 + \ldots x_n) &= 0 \\ (a-\lambda_1)x_i &= -bx_1 \ \forall i \in \{2, \ldots, n\} \end{cases}.$$

En prenant $x_1 = 1$, on obtient $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$ pour $i \geq 2$. Et il n'y a (en théorie) pas besoin de regarder la première équation : comme λ_1 est un vecteur propre, la première équation est redondante par rapport aux $n-1$ autres (on pourra le vérifier à la main pour s'en convaincre). En conclusion

$$E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ (n-1)^{-1/2} \\ \vdots \\ (n-1)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

et par le même raisonnement,

$$E_{\lambda_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(n-1)^{-1/2} \\ \vdots \\ -(n-1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Enfin, si $\lambda = a$, le système $AX = \lambda X$ s'écrit

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{cases}.$$

Il n'est alors pas bien dur de trouver une base de cette espace :

$$E_a = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Exercice 115

Soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \ldots, n$ et dont les autres coefficients valent 1. On note P_n son polynôme caractéristique.

(a) Montrer que $P_{n+1}(X) = (X - n)P_n(X) - X(X - 1)\ldots(X - n + 1)$.

(b) Montrer que pour tout entier $0 \leq k \leq n - 1$, $(-1)^{k+n}P_n(k) > 0$.

(c) En déduire que la matrice M_n est diagonalisable.

Solution:

(a) Le déterminant que l'on cherche à calculer est le suivant :

$$P_{n+1}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-n-1 \end{vmatrix}.$$

On soustrait alors la première ligne à la dernière puis l'on développe selon la dernière ligne (seul le premier et le dernier coefficient de la dernière ligne étant non nul) :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -X & \cdots & 0 & X-n \end{vmatrix} \\ &= (X-n)\begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}X\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ X-2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & X-n & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dans le deuxième déterminant qui apparaît, on peut par exemple soustraire la deuxième ligne à la première, puis la troisième à la deuxième, etc., jusqu'à soustraire la dernière ligne à l'avant-dernière :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= (X-n)P_n(X) + (-1)^{n+1}X\begin{vmatrix} 1-X & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n-1-X & 0 \\ \star & \cdots & \star & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-n)P_n(X) - (-1)^{n+1}X(1-X)(2-X)\ldots(n-1-X) \\ &= (X-n)P_n(X) - X(X-1)\ldots(X-n+1). \end{aligned}$$

(b) Puisque l'on possède une formule de récurrence pour P_n, le mieux est de démontrer cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$! On note (H_n) la propriété : pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $(-1)^{k+n}P_n(k) > 0$. Comme $P_1(X) = X - 1$, il est clair que (H_1) est vraie. On suppose ensuite que (H_n) est vraie pour un certain $n \geq 1$. Si l'on se donne $0 \leq k \leq n-1$, alors

$$P_{n+1}(k) = (k-n)P_n(k) - k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Le premier terme est le produit d'un facteur négatif et d'un facteur du signe de $(-1)^{k+n}$ et est donc bien du signe de $(-1)^{k+n+1}$, quant au second terme il est nul (car un des facteurs du produit, à savoir le $k+1$-ième, est nul). Si on prend $k = n$, on voit que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(n) &= (n-n)P_n(n) - n(n-1)\ldots(n-n+1) \\ &= -n! \\ &< 0, \end{aligned}$$

donc $P_{n+1}(n)$ est bien du signe de $(-1)^{n+n+1} = -1$. On a donc prouvé l'hérédité, et cela suffit pour conclure le raisonnement par récurrence.

(c) Si on se fixe $n \geq 1$, on voit que pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $P_n(k)P_n(k+1) < 0$, de sorte que qu'il existe une racine x_k de P_n dans l'intervalle $]k, k+1[$. De plus, comme $P_n(n-1) < 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$ (car le terme dominant de P_n est X^n), on voit qu'il existe une racine x_{n-1} de P_n dans l'intervalle $]n-1, +\infty[$. En conclusion, P_n possède n racines distinctes $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ donc est scindé à racines simples. Cela implique en particulier que la matrice M_n est diagonalisable.

Exercice 116

Soient $n \geq 1$ et $\Phi : P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto (X^2-1)P' - 2nXP$.

(a) Vérifier que Φ est linéaire et que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{2n}[X]$.

(b) Montrer que tout vecteur propre de Φ a 1 ou -1 pour racine.

(c) Déterminer les couples d'entiers (j,k) tels que $(X-1)^j(X+1)^k$ soit un vecteur propre de Φ.

(d) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Solution:

(a) La linéarité ne pose pas de problèmes, par contre pour l'image c'est un peu plus délicat. Remarquons que par linéarité il suffit de montrer que $\Phi(X^k) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ pour tout $k \in \{0,1,2,\dots,2n\}$. Si $k < 2n$, il est clair que les degrés de $(X^2-1)P'$ et de $2nXP$ sont inférieur à $2n$. Et pour $k = 2n$ on a

$$\begin{aligned}\Phi(X^{2n}) &= 2n(X^2-1)X^{2n-1} - 2nX^{2n+1} \\ &= -2nX^{2n-1} \\ &\in \mathbb{R}_{2n}[X].\end{aligned}$$

(b) Soient λ une valeur propre de Φ et $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ un vecteur propre associé. On peut écrire l'identité $\Phi(P) = \lambda P$ sous la forme

$$(X^2-1)P' = (2nX + \lambda)P$$

En évaluant en 1 et en -1, on trouve

$$(2n+\lambda)P(1) = 0 \text{ et } (-2n+\lambda)P(-1) = 0,$$

donc selon que $\lambda \neq 2n$ ou $\lambda \neq -2n$ on a $P(-1) = 0$ ou $P(1) = 0$.

(c) Il faut faire le calcul :

$$\begin{aligned}\Phi((X-1)^j(X+1)^k) &= (X-1)(X+1)[j(X-1)^{j-1}(X+1)^k + k(X-1)^j(X+1)^{k-1}] - 2nX(X-1)^j(X+1)^k \\ &= [j(X+1) + k(X-1) - 2nX](X-1)^j(X+1)^k \\ &= [(j+k-2n)X + j - k](X-1)^j(X+1)^k.\end{aligned}$$

Donc $(X-1)^j(X+1)^k$ est un vecteur propre de Φ si et seulement si $j + k = 2n$ (et dans ce cas la valeur propre associée est $j_k = 2(j-n)$).

(d) Les couples d'entiers (j,k) tels que $j+k = 2n$ et $(X-1)^j(X+1)^k \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ sont $(2n,0),(2n-1,1),\dots,(0,2n)$: il y en $2n+1$. De plus, comme les vecteurs propres $(X-1)^j(X+1)^k$ sont associés à des valeurs propres distinctes si $k+j = 2n$, on en déduit que Φ possède $2n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est de dimension $2n+1$, cela suffit pour conclure que Φ est diagonalisable.

Exercice 117

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = (X^2-1)P''$.

(a) Vérifier que u est bien défini.

(b) Quelle est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

(c) Déterminer le spectre de u. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

Solution:

(a) Il faut comprendre pourquoi on pose cette question : il faut montrer que si P est de degré au plus n, il en est de même pour $u(P)$. Mais pour un tel P, on voit que P'' est de degré au plus $n-2$, et donc $u(P) = (X^2-1)P''$ est de degré au plus n.

(b) On voit que $u(1) = u(X) = 0$ et $u(X^k) = k(k-1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ pour $k \geq 2$. En conséquence, dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, l'endomorphisme u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & & \vdots \\ & 0 & 2 & 0 & \ddots & 0 \\ & & 0 & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & n(n-1) \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, de diagonale $(0, 0, 2, \ldots, n(n-1))$, son polynôme caractéristique se calcule donc directement :

$$\chi_u(x) = x^2 \prod_{k=2}^{n} (x - k(k-2)).$$

Le spectre de u, c'est-à-dire l'ensemble des racines de χ_u, est donc $\{0, 2, 6, \ldots, n(n-1)\}$. Il y a $n-1$ valeurs propres, dont 0 qui est de multiplicité algébrique 2. Mais comme 1 et X sont deux vecteurs indépendants qui appartiennent à $E_0 = \mathrm{Ker}(u)$, on voit que E_0 est de dimension au moins 2 (donc de dimension 2, puisque la dimension de E_0 ne peut excéder la multiplicité de 0 comme racine de χ_u). En conclusion, la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre associée comme racine du polynôme caractéristique donc u est diagonalisable.

Exercice 118

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles.

(a) Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

(b) Soit λ une valeur propre de AB. On note E_λ (respectivement F_λ) le sous-espace propre de AB (respectivement BA) associé à la valeur propre λ. Montrer que $B(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $A(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.

(c) En déduire que AB est diagonalisable si et seulement si BA l'est.

Solution:

(a) Il faut calculer en utilisant les propriétés du déterminant : pour toutes matrices M et N, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ et si M est inversible $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\chi_{AB}(x) &= \det(xI_n - AB) \\
&= \det(xI_n - ABAA^{-1}) \\
&= \det(A(xI_n - BA)A^{-1}) \\
&= \det(A)\chi_{BA}(x)\det(A^{-1}) \\
&= \chi_{BA}(x).
\end{aligned}$$

(b) Soit λ une valeur propre de BA et $X \in F_\lambda$ (c'est-à-dire $BAX = \lambda X$). Pour montrer que $AX \in E_\lambda$, il faut et il suffit de montrer que $AB(AX) = \lambda(AX)$. Or

$$\begin{aligned}
AB(AX) &= A(BAX) \\
&= A(\lambda X) \\
&= \lambda AX.
\end{aligned}$$

Cela suffit pour l'inclusion $A(F_\lambda) \subset E_\lambda$. Mais comme A est inversible, elle préserve la dimension, c'est-à-dire $\dim(A(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda)$. En particulier, $\dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda)$. La situation est complètement symétrique entre A et B : c'est pourquoi on a aussi $A(F_\lambda) \subset E_\lambda$ et $\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda)$. En particulier, on a l'égalité des dimensions $\dim(E_\lambda) = \dim(F_\lambda)$.

(c) Notons S le spectre de AB, par (a) c'est aussi le spectre de BA. Avec les notations de (b), peut écrire la suite d'équivalence

$$\begin{aligned}
AB \text{ est diagonalisable } &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in S} \dim(E_\lambda) = n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in S} \dim(F_\lambda) = n \\
&\Leftrightarrow BA \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

Remarque. En fait, puisque $AB = B^{-1}(BA)B$, les matrices AB et BA sont semblables (si B est inversible), on peut donc en déduire directement que AB est diagonalisable si et seulement si BA l'est.

Exercice 119

On note

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de C.

(b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire scindé de degré n, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses racines (répétées selon leur multiplicité). Si p est un entier naturel, montrer que le polynôme unitaire $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^p)$ est aussi à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution:

(a) Le déterminant que l'on cherche à calculer est

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Afin d'annuler les -1 au dessus de la diagonale, on suppose que $x \neq 0$ et l'on effectue successivement les opérations $C_k \leftarrow \frac{1}{x} C_{k-1}$ (C_k désigne la k-ième colonne de C) pour $k = 2$, puis $k = 3$, etc., jusqu'à $k = n$. On prendra bien garde à la dernière ligne : à la fin, on obtient

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & x & 0 \\ x + a_0 & x + a_1 + \frac{a_0}{x} & \cdots & \cdots & x + a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

La matrice est alors triangulaire inférieure, en développant on obtient

$$\chi_C(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Certains pourraient s'inquiéter que l'on a supposé $x \neq 0$, mais on sait que χ_C est un polynôme, connaître sa valeur sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ revient à la connaître partout, et donc l'expression que l'on a trouvée est bien valable pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Ainsi, pour tout polynôme P unitaire de degré n, il existe une matrice de taille $n \times n$ dont P est le polynôme caractéristique.

(b) Notons $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots a_1 X + a_0$, par hypothèse $a_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Mais, avec les mêmes notations que dans (a), $P = \chi_C$. Comme P est scindé, C est trigonalisable, c'est-à-dire

$$C \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement que

$$C^p \sim \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que Q est le polynôme caractéristique de C^p. Mais il est clair que C^p est à coefficients entiers (comme C l'est), et donc χ_{C^p} (c'est-à-dire Q) est aussi à coefficients entiers.

Exercice 120

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme annulateur non nul de A.

(b) Montrer que si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A.

Solution:

(a) La famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal n^2+1 de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n^2 (à savoir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), elle ne peut donc pas être libre. Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0,$$

c'est-à-dire que le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ annule A, et il n'est pas nul car il existe au moins un $i \in \{0, 1, \dots, n^2\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

(b) Soit $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ un polynôme non nul qui annule A et p le plus petit indice tel que $\lambda_p \neq 0$. On peut alors réécrire l'identité $P(A) = 0$ comme

$$\lambda_p A^p = -\sum_{k=p+1}^{n^2} \lambda_k A^k,$$

donc en multipliant par A^{-p-1} on obtient

$$A^{-1} = -\frac{1}{\lambda_p} \sum_{k=0}^{n^2-p-1} \lambda_{p+1+k} A^k,$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 121

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_A le polynôme caractéristique de A et $\mathrm{Sp}(A)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(B)$) le spectre de A (respectivement B). Montrer que

$$\chi_A(B) \text{ est inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.$$

Solution: Le polynôme caractéristique de A étant scindé, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses racines (comptées avec mutlipli-cité) de telle sorte que $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. À partir de là, en remarquant qu'un produit de matrices est inversible si et seulement si chaque facteur du produit est inversible,

$$\begin{aligned}
\chi_A(B) \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} (B - \lambda_k I_n) \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ B - \lambda_k I_n \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \lambda_k \notin \mathrm{Sp}(B) \\
&\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda \notin \mathrm{Sp}(B) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Exercice 122

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P annulant u tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) = E$.

Solution: Compte tenu des hypothèses, on sait que P s'écrit $P = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ avec $a_1 \neq 0$.
On va montrer que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, pour cela on se donne $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$. En particulier, $y = u(x)$ pour un certain $x \in E$. Et de plus $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $u^k(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$. En évaluant $P(u)$ en x on trouve donc

que

$$\begin{aligned} 0 &= P(u)(x) \\ &= a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \ldots + a_n u^n(x) \\ &= a_1 u(x) + 0 + \ldots + 0 \\ &= a_1 u(x). \end{aligned}$$

Comme $a_1 \neq 0$, on en conclut que $u(x)$, c'est-à-dire y, est nul.
Cela permet de voir que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe, mais comme la somme de leur dimension est égale à celle de E (par le théorème du rang), on peut en conclure que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) = E$.

2.4 Espaces euclidiens

Exercice 123

Soient $p, q \geq 1$ deux entiers.

(a) Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Que retrouve-t-on lorsque $q = 1$?
On se place à présent dans le cas $p = q$.

(b) Déterminer l'orthogonal des matrices triangulaires supérieures.

(c) Déterminer l'orthogonal des matrices symétriques.

Solution:

(a) On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$. Le coefficient (j, j) de la matrice ${}^t AB$ vaut

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} b_{ij}$$

de sorte que

$$\mathrm{Tr}({}^t AB) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} b_{ij},$$

on retrouve le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Lorsque $q = 1$, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^p$ et $\mathrm{Tr}({}^t AB) = {}^t AB$: on retrouve le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$.
À partir de maintenant, on note $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$.

(b) En notant $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on sait par (a) que $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ est une base orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$. Or, comme l'ensemble $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures est

$$\mathcal{T}_p(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq p},$$

son orthogonal est engendré par les vecteurs de la base canonique restants :

$$(\mathcal{T}_p(\mathbb{R}))^{\perp} = \mathrm{Vect}(E_{ij})_{1 \leq j < i \leq p}.$$

C'est-à-dire que l'orthogonal des matrices triangulaires supérieures est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.

(c) Soit A une matrice symétrique et B une matrice antisymétrique (c'est-à-dire telle que ${}^t B = -B$). On a alors

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \mathrm{Tr}({}^t AB) \\ &= \mathrm{Tr}(AB) \\ &= \mathrm{Tr}(BA) \\ &= -\mathrm{Tr}({}^t BA) \\ &= -\langle B, A \rangle. \end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire on en déduit que $\langle A, B \rangle = -\langle A, B \rangle$, c'est-à-dire $\langle A, B \rangle = 0$. À partir de là, en notant $S_p(\mathbb{R})$ et $A_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices respectivement symétriques et antisymétriques, on a

$$A_p(\mathbb{R}) \subset (S_p(\mathbb{R}))^{\perp}.$$

Mais $A_p(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{p(p-1)}{2}$ (on ne peut choisir que les coefficients strictement au-dessus de la diagonale), et $S_p(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{p(p+1)}{2}$ (on peut choisir les coefficients au dessus de la diagonale au sens large) donc $\dim(A_p(\mathbb{R})) = p^2 - \dim(S_p(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire

$$\dim(A_p(\mathbb{R})) = \dim\left[(S_p(\mathbb{R}))^{\perp}\right].$$

Puisque l'on a une inclusion et égalité des dimensions, on a l'égalité :

$$A_p(\mathbb{R}) = (S_p(\mathbb{R}))^{\perp},$$

c'est-à-dire que l'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 124

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note $\| \ \|$ la norme associée. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

(a) Montrer que $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \|e_i\| \leq 1$.

(b) Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. En considérant $y \in (\mathrm{Vect}(e_j)_{j\neq i})^{\perp}$, montrer que $\|e_i\| \geq 1$.

(c) Montrer que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Solution:

(a) Soit $i \in \{1,\dots,n\}$, on prend $x = e_i$ dans la formule donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}\|e_i\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 \\ &\geq \langle e_i, e_i\rangle^2 \\ &= \|e_i\|^4.\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir que si $\|e_i\| > 1$, on aurait $\|e_i\|^4 > \|e_i\|^2$, de sorte que nécessairement $\|e_i\| \leq 1$.

(b) Comme $\mathrm{Vect}(e_j)_{j\neq i}$ est de dimension au plus $n-1$, le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Vect}(e_j)_{j\neq i})^{\perp}$ est de dimension au moins 1, donc on peut trouver un élément $y \neq 0$ qui y appartient. En appliquant la relation de l'énoncé avec $x = y$,

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle^2 \\ &= \langle y, e_i\rangle^2 \\ &\leq \|y\|^2\|e_i\|^2,\end{aligned}$$

où l'on a d'abord utilisé le fait que y est orthogonal à e_j pour $j \neq i$ puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il suffit alors de diviser par $\|y\|^2$ pour obtenir le résultat souhaité.

(c) D'après (a) et (b) les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont tous unitaires. Si on se donne $i \in \{1,2,\dots,n\}$, en appliquant la formule de l'énoncé avec $x = e_i$,

$$\begin{aligned}1 &= \|e_i\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 \\ &= 1 + \sum_{j\neq i} \langle e_i, e_j\rangle^2.\end{aligned}$$

Cela signifie que $\displaystyle\sum_{j\neq i} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$, et donc que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. Mais i est arbitraire, cela signifie donc que les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont deux à deux orthogonaux. Comme on sait de plus qu'ils sont unitaires et qu'il y en a n, c'est-à-dire la dimension de E, on voit que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 125

Soient E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une famille de vecteurs de E. On note M la matrice $(\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq m}$. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est libre si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Solution: Montrons plutôt que $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est liée si et seulement si $\det(M) = 0$.

Pour le sens direct, on suppose que l'on a une relation de liaison, c'est-à-dire qu'un des vecteurs (que l'on note e_j) est combinaison linéaire des autres : il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i\neq j}$ tels que

$$e_j = \sum_{i\neq j} \lambda_i e_i.$$

On note $C_1, C_2, \ldots, C_m$ les colonnes de M, et l'on effectue l'opération

$$C_j \leftarrow C_j - \sum_{i\neq j} \lambda_i C_i,$$

on note $\hat{M}$ la matrice obtenue. Si $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, le coefficient (k, j) de la matrice $\hat{M}$ vaut

$$\begin{aligned}\hat{M}_{kj} &= M_{kj} - \sum_{i\neq j} \lambda_i M_{ki} \\ &= \langle e_k, e_j\rangle - \sum_{i\neq j} \lambda_i \langle e_k, e_i\rangle \\ &= \left\langle e_k, e_j - \sum_{i\neq j} \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \langle e_k, 0\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Cela montre que la j-ième colonne de $\hat{M}$ est nulle, donc $\det(\hat{M}) = 0$ mais $\det(M) = \det(\hat{M})$, c'est donc suffisant pour conclure.

Pour le sens réciproque, on suppose que $\det(M) = 0$: les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de la matrice M sont liées, c'est-à-dire qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et des scalaires $(\lambda_i)_{i\neq j}$ tels que $C_j = \sum_{i\neq j} \lambda_i C_i$. En écrivant cela ligne par ligne, cela signifie que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$\langle e_k, e_j\rangle = \sum_{i\neq j} \lambda_i \langle e_k, e_i\rangle.$$

Ou, écrit autrement, cela veut dire que le vecteur $x = e_j - \sum_{i\neq j} \lambda_i e_i$ est orthogonal à e_k pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. En particulier, il est orthogonal à toute combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$, et donc orthogonal à lui même. C'est-à-dire $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$, et donc $x = 0$. Mais comme on peut le voir, dire que $x = 0$ revient à dire que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ possède une relation de liaison non triviale.

Exercice 126

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et l'on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, on note $a(F) = \max_{1\leq i\leq n} d(e_i, F)$.

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d(e_i, F)^2 = n - p$.

(b) Montrer que $a(F) = \sqrt{\frac{n-p}{n}}$ si et seulement si les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont équidistants de F.

Solution:

(a) On note $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base orthonormée $\mathbb{R}^n$ adaptée à F, c'est-à-dire telle que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ soit une base de F et $(f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n)$ soit une base de $F^\perp$. Si $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la distance de e_i à F est égale à la norme du projeté orthogonal de e_i sur $F^\perp$ (faire un schéma), ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} d(e_i, F) &= \left\| \sum_{k=p+1}^{n} \langle e_i, f_k \rangle f_k \right\| \\ &= \sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} \langle e_i, f_k \rangle^2}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer la somme qui nous intéresse en intervertissant les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d(e_i, F)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=p+1}^{n} \langle e_i, f_k \rangle^2 \\ &= \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, f_k \rangle^2 \\ &= \sum_{k=p+1}^{n} \|f_k\|^2 \\ &= n - p. \end{aligned}$$

(b) On utilise la propriété suivante, dont on se convaincra facilement qu'elle est vraie : si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont r réels,

$$[x_1 + x_2 + \ldots + x_r = r \max(x_1, x_2, \ldots, x_r)] \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_r.$$

À partir de là, on obtient la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2, \ldots, e_n \text{ sont équidistants de } F] &\Leftrightarrow d(e_1, F)^2 = d(e_2, F)^2 = \ldots = d(e_n, F)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d(e_i, F)^2 = n \max\left(d(e_1, F)^2, d(e_2, F)^2, \ldots, d(e_n, F)^2\right) \\ &\Leftrightarrow n - p = n \times a(F)^2 \\ &\Leftrightarrow a(F) = \sqrt{\frac{n-p}{n}}. \end{aligned}$$

Exercice 127

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Vérifier que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Justifier qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ Q(0) = \langle P, Q \rangle$.

(c) Montrer que P est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont situées dans $]0\,,1[$.

Solution:

(a) Se reporter à son cours.

(b) L'application $\varphi : Q \mapsto Q(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(Q) = \langle P, Q \rangle$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

(c) On peut voir facilement que P n'est pas nul : il suffit d'évaluer la relation définissant P avec $Q = 1$. Supposons alors par l'absurde que P ne soit pas scindé à racines simples, avec toutes ses racines dans $]0\,,1[$. Notons $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < 1$ les points $]0\,,1[$ en lesquels P change de signe. Comme ces points sont nécessairement des racines, on a alors $p < n$, en particulier le polynôme

$$Q(X) = X \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)$$

est de degré au plus n, et change lui aussi de signe en $x_1, x_2, \ldots, x_p$. En conséquence PQ est de signe constant. Comme de plus PQ n'est pas identiquement nul (comme produit de deux polynômes non nuls), on a

$$\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Mais c'est une contradiction avec le fait que $Q(0) = 0$.

Exercice 128

Soit $w : [0\,,1] \to \mathbb{R}_+^\star$ une fonction continue strictement positive. Pour tous polynômes réels P et Q on définit le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ si $n \neq m$, et telle que P_n soit de degré n et ait pour coefficient dominant 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(d) En déduire que pour tout $n \geq 1$, il existe des coefficients a_n et b_n tels que $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_nP_{n-1}$.

Solution:

(a) La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de problèmes. Pour ce qui est du caractère défini positif, il est clair que $\langle P, P\rangle \geq 0$ (puisque $w \geq 0$) et s'il y a égalité, cela veut dire que la fonction P^2w est nulle sur $[0\,,1]$. Comme $w > 0$, la fonction P^2, donc P, s'annule sur $[0\,,1]$. Le polynôme P admet une infinité de racines et est donc nul.

(b) En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient une famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, de degré échelonné, et deux à deux orthogonaux. En notant q_n le coefficient dominant de Q_n, et en définissant $P_n = \dfrac{Q_n}{q_n}$, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions de l'énoncé. En particulier, $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Par construction on sait que $\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0$. Mais de plus, puisque $\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle$ et que XQ est de degré au plus $n-1$, on voit que $\langle XP_n, Q\rangle = 0$, de sorte que

$$\langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0.$$

(d) Comme les polynômes P_{n+1} et P_n ont pour coefficients dominants 1, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est de degré au plus n, c'est-à-dire appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Mais dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ est $\mathrm{Vect}(P_n, P_{n-1})$. En effet, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-2}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_{n-2})$. Donc, d'après (c), comme $P_{n+1} - XP_n$ appartient à $(\mathbb{R}_{n-2}[X])^\perp$, il existe a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} - XP_n = a_nP_n + b_nP_{n-1},$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

Exercice 129

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Solution: *Sens direct.* Supposons que p est un projecteur orthogonal. Soient x et y des éléments de E, on écrit $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2, y_2 \in \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, l'orthogonalité de p garantit que $\langle x_1, y_2\rangle = 0$ et $\langle x_2, y_1\rangle = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \langle p(x), p(y)\rangle,\end{aligned}$$

et le rôle joué par x et y étant symétrique, on peut aussi voir que $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle$.

Sens réciproque. Supposons que p est un endomorphisme symétrique. On se donne x et y appartenant respectivement à $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle p(x), y\rangle \\ &= \langle x, p(y)\rangle \\ &= \langle x, 0\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

où l'on a d'abord utilisé le fait que $p(x) = x$, puis que p est symétrique, et enfin que $p(y) = 0$. Cela permet de voir que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont en somme directe orthogonale, et donc que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 130

Soit E un espace euclidien, on note $\| \ \|$ la norme associée. On se donne p un projecteur (quelconque). Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Solution: Pour le sens direct, on suppose que p est un projecteur orthogonal. Si $x \in E$ est un vecteur quelconque, comme $p(x)$ et $x - p(x)$ sont alors orthogonaux (faire un schéma), le théorème de Pythagore s'écrit

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Il est alors clair que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité si et seulement si $x = p(x)$ (c'est-à-dire $x \in \mathrm{Im}(p)$) d'ailleurs.

Pour le sens réciproque, on raisonne par contraposée et on suppose que p n'est pas un projecteur orthogonal : cela signifie qu'il existe $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$ tels que $\langle y, z \rangle \neq 0$. On cherche alors un x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$ sous la forme $x = y + \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on aurait pu chercher sous la forme $x = \mu y + \lambda z$ mais par linéarité de p et homogénéité de la norme on peut supposer $\mu = 1$). Dans ce cas $p(x) = y$ donc

$$\|p(x)\|^2 = \|y\|^2,$$

et

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda\langle y, z \rangle + \lambda^2\|z\|^2.$$

Or, on peut voir qu'en prenant λ assez petit et positif (si $\langle y, z \rangle < 0$) ou négatif (si $\langle y, z \rangle > 0$), on a

$$2\lambda\langle y, z \rangle + \lambda^2\|z\|^2 < 0,$$

puisque pour λ assez petit le terme en λ^2 est négligeable devant celui en λ. Et avec un λ choisi de la sorte, on voit que

$$\|p(x)\|^2 > \|x\|^2,$$

ce qui est précisément ce que l'on voulait montrer.

Exercice 131

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note $\| \ \|$ la norme associée. Soit p un projecteur orthogonal.

(a) Montrer que $\forall x, y \in E, \ \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.

(b) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

Solution:

(a) Soient x et y des éléments de E, on écrit $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2, y_2 \in \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, l'orthogonalité de p garantit que $\langle x_1, y_2 \rangle = 0$ et $\langle x_2, y_1 \rangle = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \langle p(x), y \rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle, \end{aligned}$$

et le rôle joué par x et y étant symétrique, on peut aussi voir que $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.

(b) En s'aidant de (a),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i), p(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, p(e_i) \rangle. \end{aligned}$$

Mais $\langle e_i, p(e_i) \rangle$ n'est autre que le coefficient (i, i) de la matrice de p dans la base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, matrice que l'on note M. En conclusion

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(M) \\ &= \mathrm{Tr}(p) \\ &= \mathrm{rg}(p),\end{aligned}$$

le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne étant une identité (bien connue ?) valable pour tout projecteur, qu'il soit orthogonal ou non.

Exercice 132

Soit E un espace euclidien.

(a) Justifier que les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques.

(b) Soit p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $u = p \circ q \circ p$ est diagonalisable.

(c) Montrer que le spectre de u est inclus dans $[-1\,,1]$.

Solution:

(a) On se donne p un projecteur orthogonal. Soient x et y des éléments de E, on écrit $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2, y_2 \in \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, l'orthogonalité de p garantit que $\langle x_1, y_2 \rangle = 0$ et $\langle x_2, y_1 \rangle = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\langle p(x), y \rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle,\end{aligned}$$

et le rôle joué par x et y étant symétrique, on peut aussi voir que $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$.

(b) Grâce au théorème spectral, il suffit de montrer que u est une endomorphisme symétrique ! Or, si on se donne x et y des éléments de E, grâce à (a) :

$$\begin{aligned}\langle u(x), y \rangle &= \langle p(q(p(x))), y \rangle \\ &= \langle q(p(x)), p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), q(p(y)) \rangle \\ &= \langle x, p(q(p(y))) \rangle \\ &= \langle x, u(y) \rangle.\end{aligned}$$

Une autre manière de le voir est qu'en notant P et Q les matrices de U dans une base orthonormée, elles sont symétriques par (a), et donc que la matrice U de u dans cette même base orthonormée, qui vaut PQP est symétrique puisque

$$\begin{aligned}{}^tU &= {}^t(PQP) \\ &= {}^tP{}^tQ{}^tP \\ &= PQP \\ &= U.\end{aligned}$$

(c) On part de l'observation suivante : si $x \in E$ et p est un projecteur orthogonal, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Pour le prouver, il suffit de voir que x et $x - p(x)$ sont orthogonaux, et donc d'après le théorème de Pythagore

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

À partir de là, il est clair que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$, puisque

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &= \|p(q(p(x)))\| \\ &\leq \|q(p(x))\| \\ &\leq \|p(x)\| \\ &\leq \|x\|.\end{aligned}$$

Donc, si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé,

$$\begin{aligned} |\lambda|\|x\| &= \|u(x)\| \\ &\leq \|x\|, \end{aligned}$$

en simplifiant par $\|x\|$ on obtient bien $|\lambda \leq 1|$.

Exercice 133

Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_0^1 (t\ln(t)-at-b)^2\,\mathrm{d}t\right]$ ainsi que le couple (a,b) qui réalise le minimum.

Solution: Il faut comprendre en quoi c'est un problème relié aux espaces euclidiens. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0\,,1]$ que l'on munit du produit scalaire

$$\forall f,g\in E,\ \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Pour rester dans le cadre du programme et en particulier des espaces euclidiens de dimension finie, il faudrait prendre pour E l'espace engendré par $t\mapsto 1,\ t\mapsto t$ et $t\mapsto t\ln(t)$). On note $f\in E$ la fonction définie par $f(t)=t\ln(t)$ et G le sous-espace engendré par les fonctions $t\mapsto 1$ et $t\mapsto t$. Le problème est alors de calculer

$$\min_{g\in G}\|f-g\|^2$$

ainsi que l'élément de G qui réalise le minimum.

Mais on sait que l'élément de G qui réalise le minimum est la projeté orthogonal de f sur G. Pour le calculer, plutôt que de trouver une base orthonormée de G, on va utiliser le fait que ce projeté g est caractérisé par le fait qu'il appartient à f et que $f-g$ appartient à $G^\perp$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} g\in G \\ \forall h\in G,\ \langle f-g,h\rangle \end{cases}.$$

Grâce à la première condition, on sait qu'il existe a et b tels que $g(t)=at+b$, et pour vérifier la deuxième, il suffit de montrer que g est orthogonale aux fonctions $t\mapsto 1$ et $t\mapsto t$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t)-at-b)\,\mathrm{d}t &= 0 \\ \displaystyle\int_0^1 t(t\ln(t)-at-b)\,\mathrm{d}t &= 0 \end{cases}.$$

Il faut d'abord calculer les intégrales, en particulier grâce à des intégrations par parties on voit que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{9}$, de sorte que (a,b) vérifie le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a+b &= -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b &= -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

On trouve $a=\dfrac{1}{6}$ et $b=-\dfrac{1}{3}$.

Lors du calcul de la valeur minimale, pour s'épargner un calcul trop lourd on peut remarquer que

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &= \langle f-g, f-g\rangle \\ &= \langle f, f-g\rangle \end{aligned}$$

puisque $\langle f,f-g\rangle = 0$. C'est-à-dire que la quantité que l'énoncé demande de calculer vaut

$$\int_0^1 \left[(t\ln(t))^2 - \frac{1}{6}t^2\ln(t) + \frac{1}{3}t\ln(t)\right]\,\mathrm{d}t.$$

Des intégrations par parties montrent que $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{27}$, de telle sorte que

$$\begin{aligned}\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_0^1 (t\ln(t)-at-b)^2\,\mathrm{d}t\right] &= \frac{2}{27}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{108}.\end{aligned}$$

Exercice 134

Déterminer $\displaystyle\left[\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2\,\mathrm{d}t\right]$ ainsi que le couple (a,b) qui réalise le minimum.

Solution: On se place dans l'espace $E=\mathbb{R}_2[X]$ que l'on munit du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q)\in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

En notant $P_0(X)=X^2$, on voit que l'énoncé demande de trouver

$$\inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|P_0-P\|^2.$$

Or on connaît la réponse théorique : l'infimum est un minimum, et il est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathbb{R}_1[X]$. On cherche donc à calculer ce projeté P. On sait qu'il est défini par $P\in\mathbb{R}_1[X]$ et $(P_0-P)\in\mathbb{R}_1[X]^\perp$. C'est-à-dire que le projeté $P=aX+b$ est caractérisé par

$$\begin{cases}\langle P_0-P,1\rangle &= 0\\ \langle P_0-P,X\rangle &= 0\end{cases}.$$

En explicitant ce que valent les produits scalaires,

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 (at+b)\,\mathrm{d}t &= \displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_0^1 (at+b)t\,\mathrm{d}t &= \displaystyle\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t\end{cases},$$

c'est-à-dire que (a,b) est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b &= \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b &= \frac{1}{4}\end{cases}.$$

La solution est alors $(a,b)=\left(1,\dfrac{1}{6}\right)$. Pour calculer l'infimum, on écrit, en s'aidant du fait que $\langle P,P-P_0\rangle=0$ (car $P-P_0$ est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_1[X]$), que

$$\begin{aligned}\|P_0-P\|^2 &= \langle P_0-P,P_0-P\rangle\\ &= \langle P_0,P-P_0\rangle\\ &= \int_0^1 (t^4-at^3-bt^2)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{5}-1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

Exercice 135

Soient $n\geq 1$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, on note $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ses vecteurs colonnes.

(a) Montrer qu'il existe $U\in O_n(\mathbb{R})$ et $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A=UT$.

(b) Montrer que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|A_i\|$, où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Solution:

(a) On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$: on sait qu'il existe une base orthonormée $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ telle que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on ait

$$A_k \in \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leq i \leq k}.$$

C'est-à-dire qu'il existe des coefficients $(t_{ik})_{1 \leq i \leq k \leq n}$ tels que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on ait

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} t_{ik} U_i.$$

En notant U la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ (qui est bien la matrice d'une transformation orthogonale) et T la matrice dont les coefficients (i, j) sont nuls si $i > j$ et valent t_{ij} sinon (qui est bien triangulaire supérieure), l'identité ci-dessus se réécrit

$$A = UT,$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

(b) Comme une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou -1 et que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux,

$$|\det(A)| = \prod_{k=1}^{n} |t_{kk}|.$$

Si on se fixe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, en multipliant l'identité $A_k = \sum_{i=1}^{k} t_{ik} U_i$ de part et d'autre par U_k, on obtient

$$t_{kk} = \langle A_k, U_k \rangle.$$

À partir de là, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de voir que $|t_{kk}| \leq \|A_k\|$ et donc

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=k}^{n} \|A_k\|.$$

Remarque. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on ait $|\langle A_k, U_k \rangle| = \|A_k\|$, c'est-à-dire que A_k soit colinéaire à U_k. Cela revient à dire que la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est orthogonale, c'est-à-dire constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Exercice 136

Montrer que dans un espace euclidien, une transformation orthogonale diagonalisable est une symétrie orthogonale.

Solution: Soit u une transformation orthogonale diagonalisable d'un espace euclidien E de dimension n. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes de u).
Soit $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et x un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Alors

$$\|u(x)\| = |\lambda_i| \|x\|,$$

donc puisque u est orthogonal $|\lambda_i| = 1$, c'est-à-dire $\lambda_i \in \{-1, 1\}$. En particulier $p \leq 2$.
Si $p = 1$, cela signifie que $u = \mathrm{Id}$ ou $u = -\mathrm{Id}$ et donc u est évidemment une symétrie orthogonale. Si $p = 2$, c'est-à-dire si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, et si on se donne x et y des vecteurs appartenant à respectivement E_1 et E_{-1}, on sait, puisque u est orthogonale, que

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Mais le membre de gauche vaut $\langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle$ de sorte que x et y sont orthogonaux. Comme ils sont arbitraires, cela signifie que E_1 et E_{-1} sont orthogonaux : u admet 1 et -1 pour valeur propres et les sous-espaces propres associés sont orthogonaux, cela veut exactement dire que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 137

Soient E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'application $u \in \mathcal{L}(E)$ par $u(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$.

(a) Démontrer que u est un endomorphisme symétrique.

(b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de u.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme u est-il une transformation orthogonale ?

Solution:

(a) Soient x et y des éléments de E. On voit que

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle$$

et

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, a\rangle\langle a, x\rangle,$$

la symétrie du produit scalaire permet de conclure que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

(b) L'endomorphisme u étant symétrique, on sait qu'il est diagonalisable. Le cas $\lambda = 0$ étant trivial (u est alors l'identité), on suppose $\lambda \neq 0$. Pour déterminer ses éléments propres, on cherche à résoudre l'équation $u(x) = \mu x$. Elle se réécrit

$$(1 - \mu)x = \lambda\langle x, a\rangle a.$$

Si $\mu \neq 1$, cela signifie que x est colinéaire à a, mais comme $u(a) = (1 + \lambda)a$, on voit que la droite $\mathbb{R}a$ est une droite propre de u, associée à la valeur propre $1 + \lambda$. Et si $\mu = 1$, cela signifie que $\langle x, a\rangle = 0$, c'est-à-dire que x appartient à l'hyperplan $a^\perp$.

En conclusion, $1 + \lambda$ est valeur propre, le sous-espace propre associé étant la droite $\mathbb{R}a$, et 1 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant l'hyperplan $a^\perp$. La somme de ces sous-espaces propres étant E, on en conclut que ce sont les seuls.

(c) Comme précédemment, dans le cas $\lambda = 0$ on sait que u est une transformation orthogonale. Si $\lambda \neq 0$, comme on sait que toute transformation orthogonale a pour valeur propre 1 ou -1 alors pour que u en soit une il faut nécessairement que $\lambda = -2$. Mais dans ce cas, soit on peut voir directement que u est une symétrie orthogonale (à savoir la réflexion par rapport à $a^\perp$) et donc une transformation orthogonale, soit on peut vérifier à la main que u conserve la norme :

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \|x\|^2 + 4\langle x, a\rangle^2 - 4\langle x, a\rangle\langle x, a\rangle \\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

En conclusion, u est une transformation orthogonale si et seulement si $\lambda \in \{-2, 0\}$.

Exercice 138

Soit M une matrice symétrique non nulle. Montrer que $\mathrm{rg}(M) \geq \dfrac{(\mathrm{Tr}M)^2}{\mathrm{Tr}(M^2)}$.

Solution: Comme M est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée. On note n l'ordre (la taille) de M et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Quitte à les réordonner, on suppose que les seules valeurs propres non nulles de M sont les p premières, c'est-à-dire $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Or il se trouve que $\mathrm{rg}(M) = p$ (et puisque M est non nulle $p \geq 1$), $\mathrm{Tr}(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k$ et $\mathrm{Tr}(M^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$. Or par convexité de la fonction carrée,

$$\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\right)^2 \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2,$$

un réarrangement de cette inégalité permet d'obtenir exactement celle qui est demandée par l'énoncé.

Exercice 139

Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Solution: L'observation cruciale est que
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2 = \mathrm{Tr}({}^tMM),$$
on pourra vérifier cette identité en partant du membre de droite. À partir de là, comme M est diagonalisable en base orthonormée, il existe un matrice U orthogonale telle que $M = U^{-1}DU$, où D est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. De sorte que, en utilisant le fait que ${}^tD = D$ et $U^{-1} = {}^tU$ (car U est orthogonale),
$$\begin{aligned} {}^tMM &= {}^tU{}^tD({}^tU^{-1})U^{-1}DU \\ &= U^{-1}DUU^{-1}DU \\ &= U^{-1}D^2U. \end{aligned}$$
La trace étant invariante par changement de base, $\mathrm{Tr}(U^{-1}D^2U) = \mathrm{Tr}(D^2)$. Mais D^2 est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ donc on a bien
$$\mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

3 Probabilités

3.1 Probabilités, évènements

Exercice 140

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

Solution: On note C, P et H les évènements respectifs « être un chêne », « être un peuplier » et « être un hêtre » de sorte que d'après l'énoncé $P(C) = 0.3$, $P(P) = 0.5$ et $P(H) = 0.2$. De plus, si on note M l'évènement « être malade », on sait que $P(M|C) = 0.1$, $P(M|P) = 0.04$ et $P(M|H) = 0.25$.
La probabilité qui est demandée par l'énoncé est $P(C|M)$. La formule de Bayes donne alors
$$\begin{aligned} P(C|M) &= \frac{P(C\cap M)}{P(M)} \\ &= P(M|C)\frac{P(C)}{P(M)} \\ &= \frac{P(M|C)P(C)}{P(M|C)P(C) + P(M|P)P(P) + P(M|H)P(H)}, \end{aligned}$$
où l'on a utilisé pour la dernière ligne la formule des probabilités totales. Avec exactement le même raisonnement on obtient
$$P(P|M) = \frac{P(M|P)P(P)}{P(M|C)P(C) + P(M|P)P(P) + P(M|H)P(H)}$$
et
$$P(H|M) = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M|C)P(C) + P(M|P)P(P) + P(M|H)P(H)}.$$
L'application numérique donne $P(C|M) = 30\%$, $P(P|M) = 20\%$ et $P(H|M) = 50\%$.

Exercice 141

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements. Montrer que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq 1 - \sum_{k=1}^n P(\overline{A_k})$.

Solution: Pour résoudre cet exercice il n'y a besoin que de connaître la formule $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$. En effet, on raisonne par récurrence : pour $n = 1$, l'inégalité est même une égalité puisque $P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1})$. Si la propriété est vraie au rang n, en notant A l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}) &= P(A \cap A_{n+1}) \\ &= P(A) + P(A_{n+1}) - P(A \cup A_{n+1}) \\ &= P(A) - P(\overline{A_{n+1}}) + 1 - P(A \cup A_{n+1}) \\ &\geq P(A) - P(\overline{A_{n+1}}) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) - P(\overline{A_{n+1}}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} P(\overline{A_k}). \end{aligned}$$

Exercice 142

Soit $n \geq 1$. Une information binaire (`VRAI` ou `FAUX`) part d'une source s_0 et est transmise à une autre source s_1, qui elle même la transmet à s_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que l'information arrive à s_n. À chaque transmission de s_i à s_{i+1} ($i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$), l'information change de signification (`VRAI` est transformé en `FAUX` et vice versa) avec probabilité $1-p$ et est transmise correctement avec probabilité p, et ce indépendamment des autres transmissions. On suppose enfin que s_0 émet l'information `VRAI`.

(a) Calculer p_n la probabilité que s_n ait reçu l'information `VRAI`.

(b) Dans le cas $p \in]0\,,1[$, calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution:

(a) Pour $k \in \{0, 2, \ldots, n\}$, on note I_k l'évènement « l'information reçue par la source s_k est `VRAI` », en particulier $p_n = P(I_n)$ et $P(I_0) = 1$. En utilisant la formule des probabilités totales, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(I_{k+1}) &= P(I_{k+1}|I_k)P(I_k) + P(I_{k+1}|\overline{I_k})P(\overline{I_k}) \\ &= P(I_{k+1}|I_k)p_k + P(I_{k+1}|\overline{I_k})(1-p_k). \end{aligned}$$

À ce stade on a très envie d'écrire $P(I_{k+1}|I_k) = p$ (l'information est transmise correctement) et $P(I_{k+1}|\overline{I_k}) = 1-p$ (l'information est transmise incorrectement). Mais pour l'écrire proprement il faut utiliser l'indépendance des transmissions ! En effet, l'évènement E_k correspondant à « l'information s'est transmise correctement de s_k à s_{k+1} » s'écrit

$$E_k = (I_k \cap I_{k+1}) \cup (\overline{I_k} \cap \overline{I_{k+1}}),$$

et d'après l'énoncé on peut écrire $P(E_k) = p$. Mais d'après l'indépendance des transmissions, on sait que E_k et I_k sont indépendants, c'est-à-dire

$$P(E_k \cap I_k) = P(E_k)P(I_k).$$

Or on peut voir que

$$\begin{aligned} E_k \cap I_k &= I_k \cap \left[(I_k \cap I_{k+1}) \cup (\overline{I_k} \cap \overline{I_{k+1}})\right] \\ &= (I_k \cap I_{k+1}) \cup \emptyset \\ &= I_k \cap I_{k+1}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$P(I_k \cap I_{k+1}) = P(E_k)P(I_k),$$

ce qui veut exactement dire $P(I_{k+1}|I_k) = p$. Le traitement de $P(I_{k+1}|\overline{I_k})$ se fait exactement de la même manière. Une fois cet interlude technique passé, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= pp_k + (1-p)(1-p_k) \\ &= 1 - p + (2p-1)p_k. \end{aligned}$$

On a maintenant une relation de récurrence linéaire à résoudre. Comme la suite constante et égale à $\dfrac{1}{2}$ la vérifie, cela incite à la réécrire

$$p_{k+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right),$$

et donc
$$p_k - \frac{1}{2} = (2p-1)^k \left(p_0 - \frac{1}{2}\right),$$
c'est-à-dire
$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).$$
Si l'on veut être entièrement rigoureux, il faudrait montrer que cette formule reste valable dans les cas $p = 0$ et $p = 1$ (et c'est le cas), car dans ces cas on peut avoir $P(I_k) = 0$ ou $P(\overline{I_k}) = 0$ de sorte que l'on ne peut conditionner par rapport à I_k ou $\overline{I_k}$.

(b) Si $p \in]0\,,1[$, on voit que $|2p-1| < 1$ de sorte que
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 143

On considère n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, l'urne U_k étant choisie avec une probabilité $2k/(n(n+1))$. On tire ensuite une boule de manière équiprobable dans cette urne.

(a) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

(b) Quelle est la probabilité que l'urne choisie était la k-ième sachant que l'on a tiré une boule blanche ?

Remarque : on pourra utiliser l'identité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution:

(a) Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A_k l'évènement « l'urne U_k a été choisie » et B l'évènement « une boule blanche a été tirée ». Ce que dit l'énoncé, c'est que $P(A_k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$ et $P(B|A_k) = \dfrac{k}{n}$. Comme $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ forment un système complet d'évènement,
$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{2k}{n(n+1)} \\
&= \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{2}{n^2(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n+1}{3n}.
\end{aligned}$$

(b) On demande maintenant $P(A_k|B)$, il faut utiliser la formule de Bayes.
$$\begin{aligned}
P(A_k|B) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} \\
&= \frac{\frac{k}{n} \times \frac{2k}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{3n}} \\
&= \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 144

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement les boules de l'urne deux par deux sans les remettre dedans.

(a) Calculer la probabilité p_n que chacun des n tirages contienne une boule blanche et une boule noire.

(b) Calculer un équivalent quand n tend vers l'infini de p_n. On pourra utiliser l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution:

(a) Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de tirer deux boules, et parmi ces tirages il y en a n^2 qui contienne une boule blanche et une boule noire (n choix pour la boule blanche et n choix pour la boule noire). Donc, si l'on tire deux boules, la probabilités qu'elles soient de couleur différente est

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{2n-1}.$$

Mais si le premier tirage contient deux boules de couleur différentes, on se retrouve avec une urne contenant $n-1$ boules de chaque couleur, de sorte que

$$p_n = \frac{n}{2n-1} p_{n-1}.$$

Puisque $p_1 = 1$, une récurrence immédiate montre que

$$p_n = \frac{n!}{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2^n n!$, on arrive à la formule compacte

$$p_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

(b) Il s'agit de faire le calcul : lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} p_n &\sim \frac{2^n \times 2\pi n \times n^{2n} \times e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n} \times (2n)^{2n} \times e^{-2n}} \\ &\sim \frac{2^n \times \sqrt{2\pi n} \times n^{2n}}{2^{2n} \times n^{2n}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{2^n}. \end{aligned}$$

3.2 Variables aléatoires

Exercice 145

On tire un nombre aléatoire X selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité p que X soit impair et celle q que X soit pair et plus grand que 2.

Solution: À l'aide de l'expression de la loi de Poisson, on sait que

$$p = \sum_{k \text{ impair}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ et } q = \sum_{k \text{ pair } \geq 2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Plutôt que de chercher à les calculer séparément, il est plus judicieux de les calculer ensemble. En effet,

$$\begin{aligned} p + q &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \left(e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-\lambda}, \end{aligned}$$

et pour ce qui est de la différence,

$$\begin{aligned} q-p &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= \left(e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right) - e^{-\lambda} \\ &= e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

À partir de $p+q$ et $q-p$ on retrouve p et q :

$$p = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2} \text{ et } q = \frac{(1-e^{-\lambda})^2}{2}.$$

Exercice 146

Considérons une population où la probabilité d'obtenir un garçon est la même que celle d'obtenir une fille et que les sexes des différents nouveaux-nés sont mutuellement indépendants. On suppose aussi que chaque couple fait des enfants jusqu'à obtenir un garçon (et s'arrête alors). On note A le nombre d'enfants d'un couple et B la proportion de garçons dans un couple.

(a) Donner la loi de A.

(b) Exprimer B en fonction de A, et en déduire l'espérance de B.

Solution:

(a) Pour qu'un couple ait exactement k enfants, il faut que les $k-1$ premiers soient des filles (cela arrive avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$) et que le dernier soit un garçon (cela arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$). En conséquence, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$P(A=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(b) Le nombre de garçons dans une famille est toujours 1, tandis que celui de filles est $A-1$. En conséquence, la proportion de garçons est

$$B = \frac{1}{A}.$$

D'après le théorème de transfert, l'espérance de B vaut alors

$$\begin{aligned} E(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}P(A=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k} \\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln(2), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité (bien connue ?) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ valable si $x \in]-1\,,1[$.

Exercice 147

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient $n-2$ boules rouges et 2 boules vertes. On répète l'opération suivante : on tire une boule de l'urne, si elle est rouge alors on la remet dans l'urne et si elle est verte on la retire de l'urne et on la remplace par une boule rouge (ainsi le nombre total de boules dans l'urne reste constant). On note X_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes après k tirages.

(a) Relier la loi de X_{k+1} à celle de X_k.

(b) En déduire la loi de X_k.

Solution:

(a) X_k ne peut prendre que trois valeurs possibles, à savoir $2, 1$ ou 0. On note $a_k = P(X_k = 2)$, $b_k = P(X_k = 1)$ et $c_k = P(X_k = 0)$. Il suffit alors d'utiliser la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport aux évènements $\{X_k = 2\}$, $\{X_k = 1\}$, et $\{X_k = 0\}$:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 2) &= P(X_{k+1} = 2 | X_k = 2)P(X_k = 2) + P(X_{k+1} = 2 | X_k = 1)P(X_k = 1) + P(X_{k+1} = 2 | X_k = 0)P(X_k = 0) \\ &= P(X_{k+1} = 2 | X_k = 2)P(X_k = 2) \\ &= \frac{n-2}{n} P(X_k = 2). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= P(X_{k+1} = 1 | X_k = 2)P(X_k = 2) + P(X_{k+1} = 1 | X_k = 1)P(X_k = 1) + P(X_{k+1} = 1 | X_k = 0)P(X_k = 0) \\ &= P(X_{k+1} = 1 | X_k = 2)P(X_k = 2) + P(X_{k+1} = 1 | X_k = 1)P(X_k = 1) \\ &= \frac{2}{n} P(X_k = 2) + \frac{n-1}{n} P(X_k = 1). \end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 0) &= P(X_{k+1} = 0 | X_k = 2)P(X_k = 2) + P(X_{k+1} = 0 | X_k = 1)P(X_k = 1) + P(X_{k+1} = 0 | X_k = 0)P(X_k = 0) \\ &= P(X_{k+1} = 0 | X_k = 1)P(X_k = 1) + P(X_{k+1} = 0 | X_k = 0)P(X_k = 0) \\ &= \frac{1}{n} P(X_k = 1) + P(X_k = 0). \end{aligned}$$

En conclusion, pour l'écrire sous une forme compacte,

$$\begin{cases} a_{k+1} &= \frac{n-2}{n} a_k \\ b_{k+1} &= \frac{2}{n} a_k + \frac{n-1}{n} b_k \\ c_{k+1} &= \frac{1}{n} b_k + c_k \end{cases}$$

(b) Il s'agit de résoudre le système ci-dessus, compte tenu de l'a condition initiale $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. On trouve immédiatement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \left(\frac{n-2}{n} \right)^k.$$

La relation de récurrence vérifiée par $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc

$$b_{k+1} = \frac{2}{n} \left(\frac{n-2}{n} \right)^k + \frac{n-1}{n} b_k.$$

L'équation étant linéaire avec un second membre, on cherche une solution particulière, sous la forme $u_k = \lambda \left(\frac{n-2}{n} \right)^k$. Le calcul permet de voir qu'en choisissant $\lambda = -2$, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En soustrayant terme à terme, on en déduit que

$$b_{k+1} - u_{k+1} = \frac{n-1}{n} (b_k - u_k),$$

de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$b_k - u_k = \left(\frac{n-1}{n} \right)^k (b_0 - u_0).$$

On en déduit donc, compte tenu de l'expression de u_k, que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$b_k = 2 \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^k - \left(\frac{n-2}{n} \right)^k \right].$$

Enfin, pour calculer c_k, c'est plus simple puisque l'on voit que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{k-1} b_l.$$

Il suffit simplement de connaître la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique et de ne pas faire de fautes de calcul pour obtenir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{n}\left[\frac{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k}{1-\frac{n-1}{n}} - \frac{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^k}{1-\frac{n-2}{n}}\right] \\ &= 2\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^k\right)\right] \\ &= 1+\left(\frac{n-2}{n}\right)^k - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

Exercice 148

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p (c'est-à-dire $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p$), définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Solution: Notons Y_n la variable aléatoire $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p$. Il est clair que Y_n est d'espérance nulle, et sa variance vaut

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n [X_i - p]\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i) \\ &= \frac{V(X_1)}{n}, \end{aligned}$$

où l'on a d'abord utilisé que les variables sont indépendantes puis qu'elles ont toutes la même loi. Or il se trouve que $E(X_1) = p$ et $E(X_1^2) = p$ et donc

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \\ &\leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

l'inégalité s'obtenant par une étude du trinôme $p \mapsto p(1-p)$ par exemple. En conclusion,

$$V(Y_n) \leq \frac{1}{4n}.$$

Et à partir de là, il suffit d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : puisque Y_n est d'espérance nulle,

$$\begin{aligned} P(|Y_n| \geq \varepsilon) &\leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{4n\varepsilon}. \end{aligned}$$

En passant à l'évènement complémentaire, on obtient bien le résultat voulu.

Exercice 149

Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une espérance $E(X) = m$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. On se fixe $\alpha > 0$.

(a) Montrer que $E((X - m + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.

(b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\alpha\lambda}$.

(c) En déduire que $P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ et $P(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Quand retrouve-t-on une meilleure inégalité que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

Solution:

(a) C'est une propriété (bien connue ?) de la variance ! Pour la retrouver, il suffit de développer et d'utiliser la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E((X-m+\lambda)^2) &= E((X-m)^2) + 2E(\lambda(X-m)) + E(\lambda^2) \\ &= \sigma^2 + 2\lambda(E(X)-m) + \lambda^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

(b) L'idée est de constater que les évènements $\{X-m \geq \alpha\}$ et $\{X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda\}$ sont identiques et inclus dans l'évènement $\{(X-m+\lambda)^2 \geq (\alpha+\lambda)^2\}$. On en déduit alors, grâce à l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} P(X-m \geq \alpha) &\leq P((X-m+\lambda)^2 \geq (\alpha+\lambda)^2) \\ &\leq \frac{E((X-m+\lambda)^2)}{(\alpha+\lambda)^2} \\ &= \frac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\alpha\lambda}. \end{aligned}$$

(c) Mais le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas de λ ! On peut donc choisir λ de façon à rendre le membre de droite, c'est-à-dire $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\alpha\lambda}$ le plus petit possible. Comme

$$f'(\lambda) = 2\frac{\alpha\lambda^2 + \lambda(\alpha^2-\sigma^2) - \alpha\sigma^2}{(\alpha^2+\lambda^2+2\alpha\lambda)^2},$$

on en déduit alors que la fonction f est minimale lorsque $\lambda = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} P(X-m \geq \alpha) &\leq f\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{\alpha^2}}{\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\frac{\alpha^2+\sigma^2}{\left(\alpha+\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2} \\ &= \sigma^2\frac{\alpha^2+\sigma^2}{(\alpha^2+\sigma^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité à la variable $-X$, on trouve que

$$P(-X+m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}.$$

À partir de là, en décomposant l'évènement $\{|X-m| \geq \alpha\}$ en l'union des évènements disjoints $\{X-m \geq \alpha\}$ et $\{-X+m \geq \alpha\}$, on voit que

$$\begin{aligned} P(|X-m| \geq \alpha) &= P(X-m \geq \alpha) + P(-X+m \geq \alpha) \\ &\leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}. \end{aligned}$$

Comme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P(|X_m| \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$, celle que l'on vient de démontrer est meilleure si $\dfrac{2}{\alpha^2+\sigma^2} \leq \dfrac{1}{\alpha^2}$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \leq \sigma$.

Remarque. Si $\alpha \leq \sigma$, on a de toute façon $\dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \geq 1$, donc l'inégalité que l'on vient de démontrer n'apprend pas grand chose.

Exercice 150

Soit $n \geq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On se donne a un entier dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et on considère la variable aléatoire Y_a définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_a(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) \text{ si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) \text{ si } X_2(\omega) > a \end{cases} .$$

(a) Calculer la loi de Y_a.

(b) Pour quelle valeur de a l'espérance de Y_a est-elle maximale ?

Solution:

(a) On utilise la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport à $(\{X_2 \leq a\}, \{X_2 > a\})$: si on se donne $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} P(Y_a = k) &= P(\{Y_a = k\} \cap \{X_2 \leq a\}) + P(\{Y_a = k\} \cap \{X_2 > a\}) \\ &= P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 \leq a\}) + P(\{X_2 = k\} \cap \{X_2 > a\}) \\ &= P(X_1 = k)P(X_2 \leq a) + P(X_2 = k)\mathbb{1}_{k>a} \\ &= \frac{a}{n^2} + \frac{\mathbb{1}_{k>a}}{n}. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Y_a = k) = 1$.

(b) Il faut d'abord calculer l'espérance de Y_a :

$$\begin{aligned} E(Y_a) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y_a = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k\frac{1}{n} \\ &= a\frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{(n-a)(n+a+1)}{2n} \\ &= \frac{n(n+1) + na - a^2}{2n}. \end{aligned}$$

On reconnaît une dépendance quadratique en a, donc le maximum est atteint pour $a = \dfrac{n}{2}$, c'est-à-dire que l'espérance de Y_a est minimale pour $\dfrac{n}{2}$ si n est pair, pour $a = \dfrac{n}{2} \pm \dfrac{1}{2}$ si n est impair.

Exercice 151

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables indépendantes suivant des lois géométriques (à valeurs dans $\mathbb{N}$) de paramètre α et β respectivement. Calculer la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$ ainsi que son espérance.

Solution: L'observation cruciale est que, si $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\min(X, Y) \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} P(\min(X, Y) \geq k) &= P(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}) \\ &= P(X \geq k)P(Y \geq k) \\ &= (1-\alpha)^k (1-\beta)^k \\ &= [(1-\alpha)(1-\beta)]^k. \end{aligned}$$

La variable $\min(X, Y)$ suit donc une loi géométrique de paramètre $1 - (1-\alpha)(1-\beta) = 1 + \alpha + \beta - \alpha\beta$, et donc son espérance vaut $\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1 + \alpha + \beta - \alpha\beta}$.

Exercice 152

Un oiseau pond des œufs selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf, indépendamment des autres, a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'œufs qui ont éclos. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Solution: On note Y le nombre d'œuf pondu par l'oiseau. La variable aléatoire Y suit donc une loi de Poisson de paramètre λ, et conditionnellement à $\{Y = n\}$, la variable X suit une loi binomiale de paramètre (n,p), c'est-à-dire $P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k|Y = n)P(Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp, en particulier son espérance vaut λp.

Exercice 153

Un joueur va au Casino avec une fortune $f \in \mathbb{N}$. À chaque partie (que l'on suppose indépendante des précédentes), il mise un euro et gagne avec probabilité $p \neq \frac{1}{2}$, dans ce cas il empoche le double de sa mise (donc il gagne un euro au total) et perd sa mise avec probabilité $1-p$. Il se fixe un seuil $s > f$, $s \in \mathbb{N}$ à atteindre et arrête de jouer une fois ce seuil atteint; il est aussi obligé d'arrêter de jouer si sa fortune atteint 0. Calculer la probabilité que sa fortune atteigne s avant 0.

Solution: On note A_f l'évènement « à partir de la somme f, le fortune du joueur atteint s avant 0 » et q_f sa probabilité. On note aussi G l'évènement « le joueur gagne la première partie ». En utilisant la formule des probabilités totales,

$$P(A_f) = P(A_f|G)P(G) + P(A_f|\overline{G})P(\overline{G}).$$

Or, ce que l'on peut voir est que si le jouer gagne sa première partie, c'est comme s'il commençait avec la somme $f+1$, c'est-à-dire $P(A_f|G) = P(A_{f+1})$. De manière similaire, $P(A_f|\overline{G}) = P(A_{f-1})$. Comme de plus $P(G) = p$, on voit que

$$\begin{aligned}
q_f &= P(A_f) \\
&= P(A_f|G)P(G) + P(A_f|\overline{G})P(\overline{G}) \\
&= pq_{f+1} + (1-p)q_{f-1}.
\end{aligned}$$

La suite $(q_f)_{0\leq f\leq s}$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire ainsi que les conditions aux limites $q_0 = 0$ et $q_s = 1$. Or on vérifie que les racines (distinctes) de l'équation caractéristique, qui s'écrit $pX^2 - X + (1-p)X$, sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$. En conséquence, il existe α et β des réels tels que

$$q_f = \alpha + \beta\left(\frac{1-p}{p}\right)^f.$$

Compte tenu des conditions aux bords, on voit que

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha + \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^s \beta & = 1 \end{cases}.$$

On résout facilement ce système linéaire et on trouve $(\alpha,\beta) = \left(-\dfrac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^s - 1}, \dfrac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^s - 1}\right)$. En conclusion, la probabilité demandée par l'énoncé s'exprime de la façon suivante :

$$q_f = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^f - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^s - 1}.$$

Exercice 154

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la série génératrice est de la forme

$$G_X(z) = ae^{1+z^2},$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi de X.

Solution:

(a) On sait que $G_X(1) = 1$, c'est-à-dire que $a = e^{-2}$, ou, pour l'écrire différemment,

$$G_X(z) = e^{z^2-1}.$$

(b) Il s'agit de faire un développement de G_X en série entière : pour $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} G_X(z) &= e^{-1}e^{z^2} \\ &= e^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{k!}. \end{aligned}$$

Comme on sait par ailleurs que pour $|z| < 1$, on a

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n,$$

on peut conclure, par unicité du développement d'une fonction en série entière, que

$$P(X = n) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{k!} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

En d'autres termes, $\dfrac{X}{2}$ suit une loi de poisson de paramètre 1.

Exercice 155

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoire indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire indépendante des $\{X_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geq 1$.

On considère enfin la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$, c'est-à-dire définie par $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

(a) Montrer que $G_S(x) = E(x^S)$ pour $x < 1$.

(b) En conditionnant par rapport aux évènements $\{T = n\}$, montrer que $G_S(x) = G_T(G_{X_1}(x))$.

(c) Si X_1 et T sont d'espérances finies montrer que $E[S] = E[T]E[X_1]$.

(d) Quelle est la loi de S si X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p et T une loi de Poisson de paramètre λ ?

Solution:

(a) Il suffit d'écrire le théorème de transfert (avec la fonction $f : t \mapsto x^t$) pour retrouver la définition de G_S :

$$E(x^S) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S = k)x^k.$$

(b) Pour calculer $P(S=k)$, on utilise le théorème des probabilités totales :

$$P(S=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k|T=n)P(T=n).$$

En intervertissant les sommes, on voit que

$$\begin{aligned} E(x^S) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} P(S=k|T=n)P(T=n)x^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k|T=n)x^k\right). \end{aligned}$$

Or conditionnellement à $T=n$, la loi de S est celle de la somme des n variables aléatoires $X_1+X_2+\ldots+X_n$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k|T=n)x^k = G_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(x).$$

Mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est le produit de leur fonction génératrice :

$$\begin{aligned} G_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(x) &= G_{X_1}(x)G_{X_2}(x)\ldots G_{X_n}(x) \\ &= G_{X_1}(x)^n. \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'expression précédemment trouvée,

$$\begin{aligned} E(x^S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k|T=n)x^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)G_{X_1}(x)^n \\ &= G_T(G_{X_1}(x)). \end{aligned}$$

(c) On sait, par les propriétés de la fonction génératrice, que $E[S] = G_S'(1)$. Le calcul se fait alors ici très simplement :

$$\begin{aligned} G_S'(1) &= (G_T \circ G_{X_1})'(1) \\ &= G_{X_1}'(1)G_T'(G_{X_1}(1)) \\ &= E[X_1]G_T'(G_{X_1}(1)). \end{aligned}$$

Mais comme $G_{X_1}(1) = 1$ (c'est une autre propriété de la fonction génératrice), on obtient bien

$$\begin{aligned} G_S'(1) &= E[X_1]G_T'(1) \\ &= E[T]E[X_1]. \end{aligned}$$

(d) Dans ce cas, la fonction génératrice de X_1 vaut $G_{X_1}(x) = 1-p+px$ et celle de T vaut

$$\begin{aligned} G_T(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-n}x^n \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\lambda)^n}{n!}e^{-n} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda x} \\ &= e^{(x-1)\lambda}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer la fonction génératrice de S :

$$\begin{aligned} G_S(x) &= G_T(G_{X_1}(x)) \\ &= \exp[((1-p+px)-1)\lambda] \\ &= \exp[(x-1)p\lambda]. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Or deux variables ayant la même fonction génératrice ont la même loi, c'est-à-dire que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.