Table des matières

1 Analyse

1.1 Révisions de première année

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel l. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = l$.

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers respectivement l_u et l_v. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}$, converge vers $l_u l_v$.

Exercice 3

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, notée x_n.

(b) Montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et donner sa limite.

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution dans $]0\,,1[$, que l'on notera x_n.

(b) Donner la limite l de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

(c) Trouver un équivalent de $x_n - l$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et l'on note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

(a) En appliquant une formule de Taylor judicieusement choisie, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{2M_0}{h}$.

(b) En déduire que si l'on définit $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$, alors $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 6

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note E l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives et Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

Déterminer $m = \inf\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et $M = \sup\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et éventuellement les fonctions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Exercice 7

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2015 de $x \mapsto \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2014} \frac{x^k}{k!}\right)$

1.2 Séries numériques, intégrales impropres

Exercice 8

Pour quelles valeurs de a et b la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^a)}{t^b}$ est elle intégrable sur $]0\,,+\infty[$?

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^a(x-1)^b}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit intégrable sur $]1\,,+\infty[$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ après en avoir justifié l'existence.

Exercice 11

Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tels que $f'' \geq a$. Montrer que $(1+|f|)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. On note g la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On définit la fonction h par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)+1}.$$

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $x \geq x_0$ tel que $\displaystyle\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que h n'est pas intégrable.

Exercice 13

Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14

Montrer que $f : t \mapsto \cos(t^2)$ n'est pas intégrable mais que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 15

Étudier, en fonction de α, la convergence de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{\ln(n+1)}$.

Exercice 16

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n^\alpha}$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Donner, en fonction de α, la nature de la série de terme général u_n.

(b) Calculer la somme de la série dans le cas $\alpha = 1$.

Exercice 17

Discuter, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$.

Exercice 18

Étudier la convergence de la série de terme général $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 19

Discuter, en fonction de $\alpha > 0$ la convergence de la série de terme général $\left(n^\alpha \sin\left(n^{-\alpha}\right)\right)^{n^2}$.

Exercice 20

Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

(a) Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \lambda \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ converge.

(b) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{n^\lambda}$.

(c) Donner la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{n!e^n}$.

Exercice 22

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n - 2\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 23

Pour $n \geq 2$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

(a) Donner un équivalent de $(u_n)_{n\geq 2}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n - \ln(\ln(n)))_{n\geq 2}$ converge.

1.3 Suites et séries de fonctions, intégrales à paramètres

Exercice 24

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26

En calculant $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ de deux manières différentes, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\ln(2)$.

Exercice 27

(a) Vérifier (après avoir justifié l'existence des intégrales) que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$. On pourra supposer connue l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 28

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une application continue à valeurs strictement positives. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^\alpha\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(0)$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}$.

Exercice 29

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Calculer f.

Exercice 30

On définit, pour x positif, $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.

(b) Monter que f et g sont dérivables et que $g' = -f'$.

(c) En déduire f en fonction de g puis la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 31

Soit f_n la suite de fonctions définie par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 32

Discuter de la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

Exercice 33

Discuter de la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)\cos^n(x)$.

Exercice 34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f'' soit bornée. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(x) = n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Exercice 35

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x^2}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(c) Montrer que $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$ au voisinage de 0. On pourra supposer connue l'identité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 36

On note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

(a) Quel est le domaine de définition de S ?

(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de S sur son domaine de définition.

(c) Donner un équivalent de S au voisinage de 1.

Exercice 37

Calculer le rayon de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{\sinh(n)}{\cosh(n)^2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha^{n!}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{2n} = 2^n \\ a_{2n+1} = 3^n \end{cases}$.

Exercice 38

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n^2 x^n$?

(b) Quel est celui de $\sum a_n x^{2n}$?

(c) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^{n^2}$ est supérieur ou égal à 1.

Exercice 39

Donner le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$.

Exercice 40

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(2-3x+x^2)$.

Exercice 41

Calculer le rayon de convergence, puis le domaine de convergence $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Calculer la somme dans la série lorsque $x \geq 0$.

Exercice 42

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k u_{n-1-k}$. On note $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et l'on admet que le rayon R de convergence de f est strictement positif.

(a) Montrer que $f(x) = 1 + xf^2(x)$ pour tout $x \in\,]-R\,, R[$.

(b) En déduire f, puis une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 43

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq n!$.

(b) Montrer que si $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ alors $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = e^x f(x)$.

(c) En déduire f, puis que $u_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

1.4 Équations différentielles

Exercice 44

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| = 1$. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f = e^{i\alpha}$.

On pourra raisonner par analyse-synthèse en calculant, si une telle fonction α existe, la valeur de sa dérivée.

Exercice 45

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si M est un point de la courbe représentative de f et T la tangente à cette courbe en M, alors O est le milieu du segment ayant pour extrémité l'intersection de T avec (Ox) et le projeté de M sur (Ox).

Exercice 46

Soient a et b deux réels non nuls fixés. Résoudre

$$\begin{cases} x' = \cosh(a)x + b\sinh(a)y \\ y' = \dfrac{\sinh(a)}{b}x + \cosh(a)y \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnues x et y.

Exercice 47

Soient a et b deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ telles que a soit impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution impaire.

Exercice 48

On note $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on définit $T : E \to E$ par

$$\forall f \in E,\ (Tf)(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que T est un automorphisme (application linéaire inversible) de E dans E.

(b) Montrer que T n'a pas de vecteurs propres.

Exercice 49

Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 1-périodique et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = af$. Montrer que f est 1-périodique si et seulement si $\begin{cases} f(0) &= f(1) \\ f'(0) &= f'(1) \end{cases}$.

Exercice 50

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f' + f$ soit bornée. Montrer que f est bornée.

Exercice 51

Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de $+\infty$ de $f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 52

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f'' + 2f' + 2f = g$ possède au plus une solution bornée.

Exercice 53

Soient $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f'' + (1+q)f = 0$.

(a) Pourquoi une telle fonction f existe ?

(b) En notant $h = (f')^2 + f^2$, montrer que $h' \leq |q|h$. Puis en considérant $g(t) = h(t)\exp\left(-\displaystyle\int_0^t |q(u)|\,\mathrm{d}u\right)$, montrer que h est bornée.

(c) Montrer qu'il existe des fonctions a et b de classe C^1 telles que $\begin{cases} f = a\cos + b\sin \\ f' = -a\sin + b\cos \end{cases}$.

(d) Montrer que a et b ont une limite finie en $+\infty$.

Exercice 54

Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive et f une solution non nulle de $f'' - qf = 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on considère l'équation (E) $y'' + ay = 0$. On se donne f et g deux solutions indépendantes de (E).

(a) Expliquer pourquoi tout zéro de f est isolé.

(b) Montrer que la fonction $fg' - f'g$ est constante et non nulle.

(c) On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Montrer que g s'annule sur $]x_1\,,x_2[$.

Exercice 56

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on note (E) $f'' + qf = 0$.

(a) Soient f_1 et f_2 deux solutions non liées de (E). Montrer que la fonction $f_1'f_2 - f_1f_2'$ est constante et non nulle.

(b) Soit f une solution bornée de (E). Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ puis que celle-ci est nulle.

(c) En déduire que (E) a des solutions non bornées.

Exercice 57

Chercher les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de $x^2f''(x) + xf'(x) - f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Exercice 58

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f vérifie l'équation (E) $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

(b) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière.

(c) En déduire le développement en série entière de f.

1.5 Topologie

Exercice 59

Montrer que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme dans le cas où :

(a) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $N(P) = |P(0)| + |P(1)| + \ldots + |P(n)|$.

(b) $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $N(A) = \displaystyle\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(c) $E = \{f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(0) = f'(0) = 0\}$ et $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x) + f(x)|$.

Exercice 60

Soit E l'ensemble des fonctions $[0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

(b) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

(c) Sont-elles équivalentes à $\|\ \|_\infty$?

Exercice 61

Soient $a, b > 0$. On définit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) En notant N_2 la norme euclidienne, montrer qu'il existe α et β tels que $\alpha N_2 \leq N \leq \beta N_2$. Préciser les constantes α et β optimales.

Exercice 62

(a) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $2A$ soit semblable à A.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui soit invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$ pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 63

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\|A\| = \displaystyle\max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$, et si $X \in \mathbb{R}^p$ on note $\|X\|_\infty = \displaystyle\sup_{1\leq i\leq p} |x_i|$.

(a) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\|A\| = \displaystyle\sup_{X\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

(c) Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 64

On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie et l'on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que chacune des suites coordonnées admette une sous-suite convergente. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une sous-suite convergente ?

Exercice 65

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E dont l'intérieur est non vide. Montrer que $F = E$.

Exercice 66

Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E$ tel que $f(x) = 0\}$ est fermé.

(b) Réciproquement, soit F un fermé de E et $f : x \mapsto d(x, F)$. Montrer que f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 67

Soient E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E, on définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Montrer que si A est ouverte, alors $A + B$ est ouverte.

(b) Si $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.

(c) En reprenant les A et B de (b), montrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 68

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(M) \geq r\}$ est ouvert.

Exercice 69

Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Montrer qu'il existe C tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_{n+1} - x_n\| \leq Ck^n$.

(b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note x sa limite.

(c) Montrer que $f(x) = x$ et que si $y \in \mathbb{R}^p$ vérifie $f(y) = y$ alors $y = x$.

Exercice 70

Soient E un espace euclidien (on note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur E) et $f : [0\,,1] \to E$ une fonction continue. On suppose que $\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

On définit le vecteur unitaire u par $u = \dfrac{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}{\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\|}$ et pour tout $t \in [0\,,1]$ on note $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$ la décomposition de $f(t)$ selon $\mathbb{R}u \oplus (\mathbb{R}u)^\perp$ (c'est-à-dire $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ et $v(t) \in (\mathbb{R}u)^\perp$).

(a) Justifier que α et v sont des fonctions continues sur $[0\,,1]$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$ est orthogonal à u et en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

(c) En déduire que pour tout $t \in [0\,,1]$, on a $f(t) = \|f(t)\|u$. Quelle est l'interprétation géométrique ?

Exercice 71

Soient $a < b$ et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

(a) Montrer le résultat demandé lorsque f est de classe C^1.

(b) Conclure par densité pour le cas général.

1.6 Calcul différentiel

Exercice 72

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 73

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{grad} f(x)$ est orthogonal à x. Que peut-on dire de f ?

Exercice 74

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 75

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante sur $]0\,,+\infty[\times]0\,,+\infty[$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

La résoudre en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$.

Exercice 76

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3,\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$.

(a) Montrer que f vérifie l'équation aux dérivées partielles (E) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(b) Résoudre (E) en effectuant le changement de variables $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

(c) Réciproquement, est-ce que toute solution de (E) vérifie la même propriété que f ?

Exercice 77

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On note $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

(a) Montrer que g est de classe C^2 et que $r\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$.

(b) On note $u(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que u est de classe C^2 et que $ru''(r) + u'(r) = 0$.

(c) En déduire que u est constante et égale à $f(0)$.

Exercice 78

On rappelle que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. Montrer que si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une transformation orthogonale alors $\Delta(f \circ \phi) = (\Delta f) \circ \phi$.

Exercice 79

Soient $a \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 2axy$. Trouver les extrema de f.

Exercice 80

Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue.

(b) Déterminer les extrema de f.

Exercice 81

Soient $n \geq 1$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(M) = \det(M)$.

(a) Montrer que la différentielle de f en la matrice identité est l'application linéaire trace.

(b) Montrer que si A est une matrice inversible alors $df(A).H = (\det A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$.

Exercice 82

(a) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$. Déterminer la différentielle de f.

(b) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $\phi(t) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout t. Montrer que pour tout t, ${}^t(\phi'(t))\phi(t) + {}^t\phi(t)\phi'(t) = 0$.

(c) En déduire que si n est impair, ϕ' n'est jamais inversible.

Exercice 83

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

(a) Montrer que pour tout $x \neq 0$ et tout h, $df(x).h = \dfrac{h}{\|x\|^2} - 2\dfrac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x$.

(b) En déduire que pour tout x non nul, $\|x\|^2 df(x)$ est une symétrie orthogonale.

Exercice 84

Soient S la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et P le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à P. Y-a-t-il des points de S en lesquels le plan tangent est confondu avec P ?

Exercice 85

Soient S la surface d'équation $xy = z^3$ et D la droite d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$. Déterminer les points non critiques de S en lesquels le plan tangent à S contient D.

2 Algèbre

2.1 Révisions de première année

Exercice 86

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Monter que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 87

Soit $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.

Exercice 88

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction (réelle) définie par $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 89

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction (réelle) définie par $f_a(x) = |x-a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 90

Soient E un espace vectoriel, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exercice 91

Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(b) On suppose que $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$. Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Exercice 92

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. On note Δ l'endomorphisme de E tel que $\Delta(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

(a) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\Delta(E_n) \subset E_{n-2}$.

(b) Calculer $\mathrm{Ker}(\Delta)$. En déduire que $\Delta : E \to E$ est surjective.

(c) On note $\hat{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\Delta : \hat{E} \to E$ est bijective.

Exercice 93

On note $E = K^n$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de E. Montrer que $(X_i {}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 94

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\mathcal{L}_V(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \text{ tels que } V \subset \mathrm{Ker}(u)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Exercice 95

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est surjective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 96

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\begin{array}{cccc} \phi_u & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & v & \mapsto & u \circ v \end{array}.$$

Calculer l'image, le noyau et le rang de ϕ_u.

Exercice 97

Soient n un entier naturel et $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$ $n+1$ réels distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\omega_i.$$

Exercice 98

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

2.2 Polynômes et nombres complexes

Exercice 99

Soit $n \geq 1$, on note $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(a) Calculer le produit des n racines n-ièmes de l'unité.

(b) Si $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 100
Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour qu'une des racines de P soit égale au produit des deux autres.

Exercice 101
(a) Montrer que si P est un polynôme réel scindé à racines simples, alors P' l'est aussi.
(b) Soit P un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, toute racine de $P - c$ est au plus double.

Exercice 102
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$, vu comme un élément de $\mathbb{C}[X]$, est aussi scindé à racines simples.

Exercice 103
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 104
(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout θ réel, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
(b) Quelles sont les racines de P_n ?
(c) Soient n et m entiers. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n et m pour que P_n divise P_m.

2.3 Réduction des endomorphismes

Exercice 105
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB = BA$. Montrer que si F est un sous-espace propre de A, alors $B(F) \subset F$.

Exercice 106
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire vérifiant $u^n = 0$.
(a) Montrer que toute valeur propre de u est nulle.
(b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $u = 0$.

Exercice 107
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $AB = BA$. On veut montrer que A et B sont cotrigonalisables (c'est-à-dire qu'elles se trigonalisent à l'aide de la même matrice de passage).
(a) Montrer que A stabilise les sous-espaces propres de B.
(b) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
(c) Conclure.

Exercice 108
Soient A et B deux matrices réelles de taille $n \times n$ telles que $AB = BA$. On suppose de plus que A possède n valeurs propres distinctes.
(a) Montrer que B stabilise les sous-espaces propres de A.
(b) Montrer que A et B sont codiagonalisables.
(c) Montrer que B est un polynôme en A.

Exercice 109
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes sur E. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si v stabilise les sous-espaces propres de u.

Exercice 110
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 111
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, on note $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Donner les valeurs propres de B et les sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 112
Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application qui à toute matrice M de lignes $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ associe la matrice dont les lignes sont $(L_2, L_3, \ldots, L_n, L_1)$. Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses éléments propres.

Exercice 113

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Déterminer les vecteurs propres et sous-espaces propres de A.

(b) A est elle diagonalisable ?

Exercice 114

Soient a et b deux réels et $n \geq 2$ un entier, on note

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 115

Soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$ et dont les autres coefficients valent 1. On note P_n son polynôme caractéristique.

(a) Montrer que $P_{n+1}(X) = (X-n)P_n(X) - X(X-1)\dots(X-n+1)$.

(b) Montrer que pour tout entier $0 \leq k \leq n-1$, $(-1)^{k+n}P_n(k) > 0$.

(c) En déduire que la matrice M_n est diagonalisable.

Exercice 116

Soient $n \geq 1$ et $\Phi : P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto (X^2-1)P' - 2nXP$.

(a) Vérifier que Φ est linéaire et que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{2n}[X]$.

(b) Montrer que tout vecteur propre de Φ a 1 ou -1 pour racine.

(c) Déterminer les couples d'entiers (j,k) tels que $(X-1)^j(X+1)^k$ soit un vecteur propre de Φ.

(d) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 117

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = (X^2-1)P''$.

(a) Vérifier que u est bien défini.

(b) Quelle est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

(c) Déterminer le spectre de u. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

Exercice 118

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles.

(a) Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

(b) Soit λ une valeur propre de AB. On note E_λ (respectivement F_λ) le sous-espace propre de AB (respectivement BA) associé à la valeur propre λ. Montrer que $B(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $A(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ ont même dimension.

(c) En déduire que AB est diagonalisable si et seulement si BA l'est.

Exercice 119

On note

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de C.

(b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire scindé de degré n, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses racines (répétées selon leur multiplicité). Si p est un entier naturel, montrer que le polynôme unitaire $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^p)$ est aussi à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 120

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme annulateur non nul de A.

(b) Montrer que si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 121

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_A le polynôme caractéristique de A et $\mathrm{Sp}(A)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(B)$) le spectre de A (respectivement B). Montrer que

$$\chi_A(B) \text{ est inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.$$

Exercice 122

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P annulant u tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) = E$.

2.4 Espaces euclidiens

Exercice 123

Soient $p, q \geq 1$ deux entiers.

(a) Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Que retrouve-t-on lorsque $q = 1$?
On se place à présent dans le cas $p = q$.

(b) Déterminer l'orthogonal des matrices triangulaires supérieures.

(c) Déterminer l'orthogonal des matrices symétriques.

Exercice 124

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note $\|\ \|$ la norme associée. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

(a) Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \|e_i\| \leq 1$.

(b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. En considérant $y \in (\mathrm{Vect}(e_j)_{j\neq i})^{\perp}$, montrer que $\|e_i\| \geq 1$.

(c) Montrer que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 125

Soient E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une famille de vecteurs de E. On note M la matrice $(\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq m}$. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est libre si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Exercice 126

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et l'on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, on note $a(F) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(e_i, F)$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d(e_i, F)^2 = n - p$.

(b) Montrer que $a(F) = \sqrt{\dfrac{n-p}{n}}$ si et seulement si les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont équidistants de F.

Exercice 127

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Vérifier que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Justifier qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ Q(0) = \langle P, Q\rangle$.

(c) Montrer que P est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont situées dans $]0\,,1[$.

Exercice 128

Soit $w : [0\,,1] \to \mathbb{R}_+^\star$ une fonction continue strictement positive. Pour tous polynômes réels P et Q on définit le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ si $n \neq m$, et telle que P_n soit de degré n et ait pour coefficient dominant 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

(d) En déduire que pour tout $n \geq 1$, il existe des coefficients a_n et b_n tels que $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.

Exercice 129

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Exercice 130

Soit E un espace euclidien, on note $\| \ \|$ la norme associée. On se donne p un projecteur (quelconque). Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 131

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note $\| \ \|$ la norme associée. Soit p un projecteur orthogonal.

(a) Montrer que $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

(b) Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

Exercice 132

Soit E un espace euclidien.

(a) Justifier que les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques.

(b) Soit p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $u = p \circ q \circ p$ est diagonalisable.

(c) Montrer que le spectre de u est inclus dans $[-1\,,1]$.

Exercice 133

Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_0^1 (t\ln(t) - at - b)^2\,\mathrm{d}t\right]$ ainsi que le couple (a, b) qui réalise le minimum.

Exercice 134

Déterminer $\displaystyle\left[\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t\right]$ ainsi que le couple (a, b) qui réalise le minimum.

Exercice 135

Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, on note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ses vecteurs colonnes.

(a) Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = UT$.

(b) Montrer que $|\det(A)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|A_i\|$, où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 136

Montrer que dans un espace euclidien, une transformation orthogonale diagonalisable est une symétrie orthogonale.

Exercice 137

Soient E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'application $u \in \mathcal{L}(E)$ par $u(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$.

(a) Démontrer que u est un endomorphisme symétrique.

(b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de u.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme u est-il une transformation orthogonale ?

Exercice 138

Soit M une matrice symétrique non nulle. Montrer que $\mathrm{rg}(M) \geq \dfrac{(\mathrm{Tr}M)^2}{\mathrm{Tr}(M^2)}$.

Exercice 139

Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

3 Probabilités

3.1 Probabilités, évènements

Exercice 140

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

Exercice 141

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements. Montrer que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(\overline{A_k})$.

Exercice 142

Soit $n \geq 1$. Une information binaire (`VRAI` ou `FAUX`) part d'une source s_0 et est transmise à une autre source s_1, qui elle même la transmet à s_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que l'information arrive à s_n. À chaque transmission de s_i à s_{i+1} ($i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$), l'information change de signification (`VRAI` est transformé en `FAUX` et vice versa) avec probabilité $1-p$ et est transmise correctement avec probabilité p, et ce indépendamment des autres transmissions. On suppose enfin que s_0 émet l'information `VRAI`.

(a) Calculer p_n la probabilité que s_n ait reçu l'information `VRAI`.

(b) Dans le cas $p \in]0\,,1[$, calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 143

On considère n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, l'urne U_k étant choisie avec une probabilité $2k/(n(n+1))$. On tire ensuite une boule de manière équiprobable dans cette urne.

(a) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

(b) Quelle est la probabilité que l'urne choisie était la k-ième sachant que l'on a tiré une boule blanche ?

Remarque : on pourra utiliser l'identité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 144

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement les boules de l'urne deux par deux sans les remettre dedans.

(a) Calculer la probabilité p_n que chacun des n tirages contienne une boule blanche et une boule noire.

(b) Calculer un équivalent quand n tend vers l'infini de p_n. On pourra utiliser l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

3.2 Variables aléatoires

Exercice 145

On tire un nombre aléatoire X selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité p que X soit impair et celle q que X soit pair et plus grand que 2.

Exercice 146

Considérons une population où la probabilité d'obtenir un garçon est la même que celle d'obtenir une fille et que les sexes des différents nouveaux-nés sont mutuellement indépendants. On suppose aussi que chaque couple fait des enfants jusqu'à obtenir un garçon (et s'arrête alors). On note A le nombre d'enfants d'un couple et B la proportion de garçons dans un couple.

(a) Donner la loi de A.

(b) Exprimer B en fonction de A, et en déduire l'espérance de B.

Exercice 147

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient $n-2$ boules rouges et 2 boules vertes. On répète l'opération suivante : on tire une boule de l'urne, si elle est rouge alors on la remet dans l'urne et si elle est verte on la retire de l'urne et on la remplace par une boule rouge (ainsi le nombre total de boules dans l'urne reste constant). On note X_k la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes après k tirages.

(a) Relier la loi de X_{k+1} à celle de X_k.

(b) En déduire la loi de X_k.

Exercice 148

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p (c'est-à-dire $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1-p$), définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Exercice 149

Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une espérance $E(X) = m$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. On se fixe $\alpha > 0$.

(a) Montrer que $E((X - m + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.

(b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $P(X - m \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\alpha\lambda}$.

(c) En déduire que $P(X - m \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ et $P(|X - m| \geq \alpha) \leq \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Quand retrouve-t-on une meilleure inégalité que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 150

Soit $n \geq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On se donne a un entier dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on considère la variable aléatoire Y_a définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_a(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) \text{ si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) \text{ si } X_2(\omega) > a \end{cases} .$$

(a) Calculer la loi de Y_a.

(b) Pour quelle valeur de a l'espérance de Y_a est-elle maximale ?

Exercice 151

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables indépendantes suivant des lois géométriques (à valeurs dans $\mathbb{N}$) de paramètre α et β respectivement. Calculer la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$ ainsi que son espérance.

Exercice 152

Un oiseau pond des œufs selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf, indépendamment des autres, a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'œufs qui ont éclos. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 153

Un joueur va au Casino avec une fortune $f \in \mathbb{N}$. À chaque partie (que l'on suppose indépendante des précédentes), il mise un euro et gagne avec probabilité $p \neq \frac{1}{2}$, dans ce cas il empoche le double de sa mise (donc il gagne un euro au total) et perd sa mise avec probabilité $1 - p$. Il se fixe un seuil $s > f$, $s \in \mathbb{N}$ à atteindre et arrête de jouer une fois ce seuil atteint ; il est aussi obligé d'arrêter de jouer si sa fortune atteint 0. Calculer la probabilité que sa fortune atteigne s avant 0.

Exercice 154

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la série génératrice est de la forme

$$G_X(z) = a e^{1+z^2},$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi de X.

Exercice 155

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoire indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire indépendante des $\{X_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geq 1$.

On considère enfin la variable aléatoire $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{T} X_k$, c'est-à-dire définie par $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

(a) Montrer que $G_S(x) = E(x^S)$ pour $x < 1$.

(b) En conditionnant par rapport aux évènements $\{T = n\}$, montrer que $G_S(x) = G_T(G_{X_1}(x))$.

(c) Si X_1 et T sont d'espérances finies montrer que $E[S] = E[T]E[X_1]$.

(d) Quelle est la loi de S si X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p et T une loi de Poisson de paramètre λ ?