

# Convexité cachée dans un problème d'élasticité non linéaire

---

Hugo Lavenant<sup>a</sup> – en collaboration avec Nassif Ghoussoub, Young-Heon Kim et Aaron Zeff Palmer

28 avril 2020

Séminaire d'analyse, Université de Strasbourg

1. Un problème non convexe

2. Une relaxation convexe

3. Optimalité de la relaxation et conséquences

# 1. Un problème non convexe

---

# Un problème variationnel inspiré de l'élasticité

$D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  domaines bornés de mesure unité avec bord lisse.  $\mathcal{L}_D$  et  $\mathcal{L}_\Omega$  mesures de Lebesgue restreintes à  $D$  et  $\Omega$  respectivement.

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ E(u) := \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u = g \text{ sur } \partial D \text{ et } u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \right\}$$

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  force extérieure.
- $g: \partial D \rightarrow \partial\Omega$  déformation prescrite au bord.
- $u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \Leftrightarrow \forall B \subset \Omega, \mathcal{L}_D(u^{-1}(B)) = \mathcal{L}_\Omega(B)$ .

Si  $d = k$  et  $u$  est lisse et bijective, c'est équivalent à

$$|\det \nabla u| = 1.$$

# Un problème variationnel inspiré de l'élasticité

$D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  domaines bornés de mesure unité avec bord lisse.  $\mathcal{L}_D$  et  $\mathcal{L}_\Omega$  mesures de Lebesgue restreintes à  $D$  et  $\Omega$  respectivement.

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ E(u) := \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u = g \text{ sur } \partial D \text{ et } u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \right\}$$

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  force extérieure.
- $g: \partial D \rightarrow \partial\Omega$  déformation prescrite au bord.
- $u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \Leftrightarrow \forall B \subset \Omega, \mathcal{L}_D(u^{-1}(B)) = \mathcal{L}_\Omega(B)$ .

Si  $d = k$  et  $u$  est lisse et bijective, c'est équivalent à

$$|\det \nabla u| = 1.$$

Les points critiques vérifient  $\Delta u + f = (\nabla \omega) \circ u$  dans l'intérieur de  $D$ , où  $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un multiplicateur de Lagrange.

# Sans contrainte d'incompressibilité

$$\min_{u:D \rightarrow \mathbb{R}^k} \left\{ \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u = g \text{ sur } \partial D \text{ et } u \in \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \right\}$$

C'est un problème convexe.

## Théorème

Sous des hypothèses de régularité sur  $f, g$  et  $D$ , il existe un unique minimiseur global  $u$  et il vérifie

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{dans } D, \\ u = g & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

# Sans énergie de Dirichlet et $D = \Omega$

$$\min_{u:D \rightarrow D} \left\{ \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u \equiv g \text{ sur } \partial D \text{ et } u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D \right\}$$

## Théorème (factorisation polaire)<sup>1</sup>

On suppose  $f \in L^2(D, \mathbb{R}^k)$  et  $(f \# \mathcal{L}_D)(B) = 0$  si  $\mathcal{H}^{d-1}(B) = 0$ . Alors  $f$  s'écrit de manière unique

$$f = (\nabla \omega) \circ u$$

où  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et  $u : D \rightarrow D$  vérifie  $u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D$ . La fonction  $u$  est l'unique minimiseur de l'énergie sous la contrainte  $u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D$ .

1. Brenier (1987). *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs.*

## But de cet exposé

Une théorie d'existence existe par exemple dans le cadre des fonctions polyconvexes<sup>2</sup>.

---

2. Ball (1976). *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*.



## But de cet exposé

Une théorie d'existence existe par exemple dans le cadre des fonctions polyconvexes<sup>2</sup>.

Aujourd'hui : proposer une relaxation convexe du problème avec énergie de Dirichlet **et** contrainte d'incompressibilité.

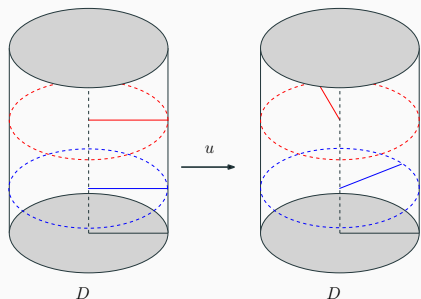
Tentatives précédentes :

- Louet (2014). *Optimal transport problems with gradient penalization*.
- Awi et Gangbo (2014). *A polyconvex integrand ; Euler-Lagrange equations and uniqueness of equilibrium*.

---

2. Ball (1976). *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*.

## Un exemple : la torsion du cylindre

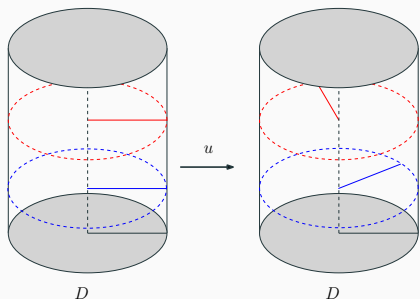


$D = \Omega = B(0, 1) \times [0, 1]$ . Pour  $a > 0$ ,

$$u_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{az} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix}$$

où  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  rotation d'angle  $\theta$ .

## Un exemple : la torsion du cylindre



$D = \Omega = B(0, 1) \times [0, 1]$ . Pour  $a > 0$ ,

$$u_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{az} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix}$$

où  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  rotation d'angle  $\theta$ .

### Résultat ( $f \equiv 0$ )

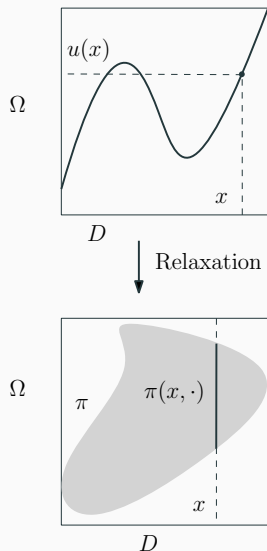
Pour tout  $a$ , la fonction  $u_a$  est un point critique de l'énergie.

On va voir que, au moins pour  $a$  petit, c'est un minimiseur global de l'énergie avec condition au bord  $g = u_a|_{\partial D}$ .

## **2. Une relaxation convexe**

---

# Plan de transport

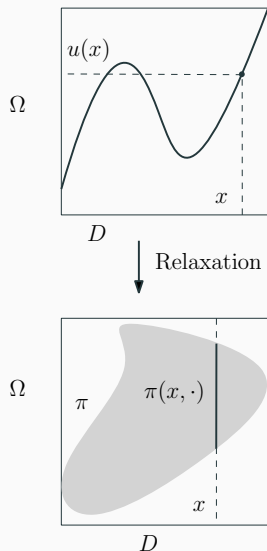


## Méthode

$u : D \rightarrow \Omega$  satisfaisant  $u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega$  est remplacé par  $\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)$  dont les marginales sont  $\mathcal{L}_D$  et  $\mathcal{L}_\Omega$ . On note  $\pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega)$ .

- Les contraintes sur les marginales de  $\pi$  sont linéaires. Par exemple, pour tout  $a \in C(D)$  :

$$\iint_{D \times \Omega} a(x) \pi(dx, dy) = \int_D a(x) dx$$



## Méthode

$u : D \rightarrow \Omega$  satisfaisant  $u\#\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega$  est remplacé par  $\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)$  dont les marginales sont  $\mathcal{L}_D$  et  $\mathcal{L}_\Omega$ . On note  $\pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega)$ .

- Les contraintes sur les marginales de  $\pi$  sont linéaires. Par exemple, pour tout  $a \in C(D)$  :

$$\iint_{D \times \Omega} a(x) \pi(dx, dy) = \int_D a(x) dx$$

- Par désintégration/fubiniisation, on peut voir  $\pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega)$  comme une application  $\pi : x \in D \rightarrow \pi(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ .
- Si  $u : D \rightarrow \Omega$ , on peut associer  $\pi_u$  défini par  $\pi_u(x, \cdot) = \delta_{y=u(x)}$ .

## Retour au problème

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u = g \text{ sur } \partial D \text{ et } u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \right\}$$



$$\min_{\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)} \left\{ ?? - \iint_{D \times \Omega} f(x) \cdot y \pi(dx, dy) : ?? \text{ et } \pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega) \right\}$$

Sans énergie de Dirichlet, c'est exactement la relaxation de Yann Brenier en 1987 pour prouver la factorisation polaire!

## Retour au problème

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) \cdot u(x) \right) dx : u = g \text{ sur } \partial D \text{ et } u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega \right\}$$



$$\min_{\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)} \left\{ ?? - \iint_{D \times \Omega} f(x) \cdot y \pi(dx, dy) : ?? \text{ et } \pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega) \right\}$$

Sans énergie de Dirichlet, c'est exactement la relaxation de Yann Brenier en 1987 pour prouver la factorisation polaire!

### Question

Comment définir une énergie de Dirichlet pour  $\pi : D \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ ?



# Énergie de Dirichlet pour des applications à valeur mesure<sup>3 4</sup>

$J : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$  mesure à valeurs matrices, avec  $\frac{dJ}{d\pi}$  « densité de matrice jacobienne ». Contrainte entre  $\pi$  et  $J$  :

$$\nabla_x \pi(x, y) + \nabla_y \cdot J(x, y) = 0,$$

et l'énergie de Dirichlet est

$$\iint_{D \times \Omega} \frac{|J|^2}{2\pi} = \iint_{D \times \Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{dJ}{d\pi} \right|^2 d\pi$$

---

3. Brenier (2003). *Extended Monge-Kantorovich theory*.

4. Lavanant (2019). *Harmonic mappings valued in the Wasserstein space*.

# Énergie de Dirichlet pour des applications à valeur mesure<sup>3 4</sup>

$J : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$  mesure à valeurs matrices, avec  $\frac{dJ}{d\pi}$  « densité de matrice jacobienne ». Contrainte entre  $\pi$  et  $J$  :

$$\nabla_x \pi(x, y) + \nabla_y \cdot J(x, y) = 0,$$

et l'énergie de Dirichlet est

$$\iint_{D \times \Omega} \frac{|J|^2}{2\pi} = \iint_{D \times \Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{dJ}{d\pi} \right|^2 d\pi$$

Si  $\pi(dx, dy) = \pi_u(dx, dy) = \delta_{y=u(x)} dx$  on choisit

$$\frac{dJ_u}{d\pi_u}(x, y) = \nabla u(x) \quad \text{de sorte que} \quad \iint_{D \times \Omega} \frac{|J_u|^2}{2\pi_u} = \int_D \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

---

3. Brenier (2003). *Extended Monge-Kantorovich theory*.

4. Lavanant (2019). *Harmonic mappings valued in the Wasserstein space*.

Pour  $\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)$  fixé dont la première marginale est  $\mathcal{L}_D$ ,

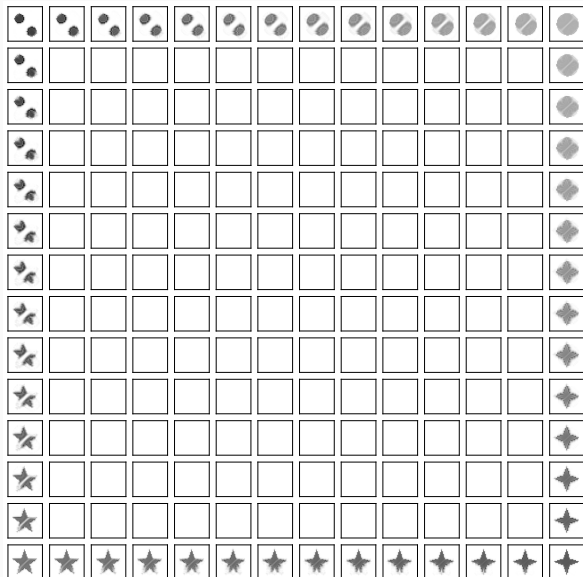
$$\min_J \left\{ \iint_{D \times \Omega} \frac{|J|^2}{2\pi} : \nabla_x \pi + \nabla_y \cdot J = 0 \right\}$$

peut se voir comme l'énergie de Dirichlet à la Korevaar et Schoen<sup>5</sup> de l'application  $\pi$  à valeurs dans l'espace  $\mathcal{P}(\Omega)$  muni de la distance de Wasserstein .

---

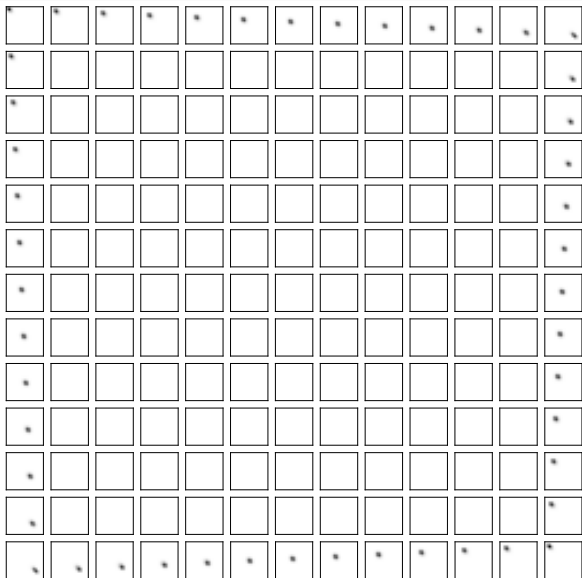
5. Korevaar et Schoen (1993). *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*.

# Applications harmoniques sans contrainte d'incompressibilité

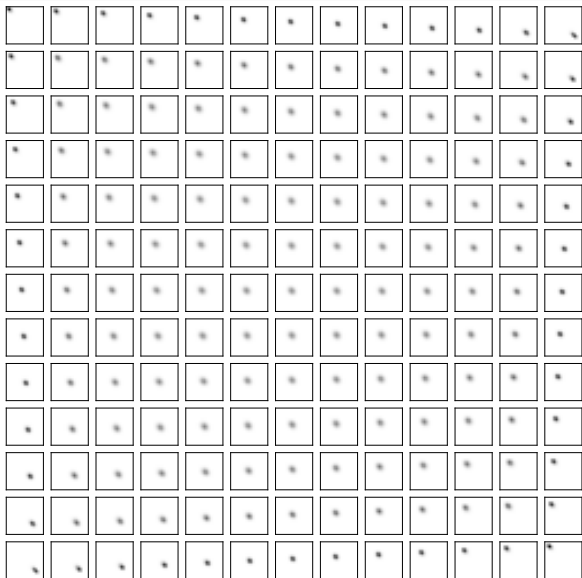




# Applications harmoniques sans contrainte d'incompressibilité



# Applications harmoniques sans contrainte d'incompressibilité



# Retour au problème avec incompressibilité : la relaxation

## Énergie relaxée

On dit que  $\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)$  et  $J \in \mathcal{M}(D \times \Omega, \mathbb{R}^{d \times k})$  sont admissibles si

$$\begin{cases} \pi & \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega) \\ \nabla_x \pi + \nabla_y \cdot J & = 0 & \text{dans } D \times \Omega \\ \pi(x, \cdot) & = \delta_{y=g(x)} & \text{pour } x \in \partial D \end{cases}$$

et on définit alors

$$E_r(\pi, J) = \iint_{D \times \Omega} \frac{1}{2} \left( \left| \frac{dJ}{d\pi} \right|^2 (x, y) - f(x) \cdot y \right) \pi(dx, dy)$$

Minimiser  $E_r$  parmi les  $(\pi, J)$  admissibles est un problème convexe!



# Retour au problème avec incompressibilité : la relaxation

## Énergie relaxée

On dit que  $\pi \in \mathcal{P}(D \times \Omega)$  et  $J \in \mathcal{M}(D \times \Omega, \mathbb{R}^{d \times k})$  sont admissibles si

$$\begin{cases} \pi & \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_\Omega) \\ \nabla_x \pi + \nabla_y \cdot J & = 0 & \text{dans } D \times \Omega \\ \pi(x, \cdot) & = \delta_{y=g(x)} & \text{pour } x \in \partial D \end{cases}$$

et on définit alors

$$E_r(\pi, J) = \iint_{D \times \Omega} \frac{1}{2} \left( \left| \frac{dJ}{d\pi} \right|^2 (x, y) - f(x) \cdot y \right) \pi(dx, dy)$$

Minimiser  $E_r$  parmi les  $(\pi, J)$  admissibles est un problème convexe!

Si  $u \# \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_\Omega$  et  $u = g$  sur  $\partial D$  alors  $(\pi_u, J_u)$  admissible et

$$E(u) = E_r(\pi_u, J_u).$$

# Le problème dual

Trois multiplicateurs de Lagrange :  $\psi, \omega$  pour les contraintes de marginales,  $\varphi$  pour  $\nabla_x \pi + \nabla_y \cdot J = 0$  et la condition au bord.

## Le problème dual

On dit que  $(\varphi, \psi, \omega)$  où  $\varphi \in C^1(D \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ ,  $\psi \in C(D)$  et  $\omega \in C(\Omega)$  sont admissibles si pour tout  $(x, y) \in D \times \Omega$ ,

$$\psi(x) + \omega(y) - f(x) \cdot y \geq \left( \nabla_x \cdot \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_y \varphi|^2 \right) (x, y).$$

et on définit alors

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) = \int_{\partial D} \varphi(x, g(x)) \cdot \mathbf{n}_D(x) \, dx - \int_D \psi(x) \, dx - \int_{\Omega} \omega(y) \, dy.$$

# Lien entre le primal et le dual

## Proposition (dualité faible)

Si  $(\pi, J)$  admissible dans le primal et  $(\varphi, \psi, \omega)$  admissible dans le dual,

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) \leq E_r(\pi, J).$$

# Lien entre le primal et le dual

## Proposition (dualité faible)

Si  $(\pi, J)$  admissible dans le primal et  $(\varphi, \psi, \omega)$  admissible dans le dual,

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) \leq E_r(\pi, J).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \nabla_y \varphi(x, y) = \frac{dJ}{d\pi}(x, y) & \text{pour } \pi - \text{presque tout } x, y \\ \psi(x) + \omega(y) - f(x) \cdot y = \nabla_x \cdot \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_y \varphi|^2 & \text{pour } \pi - \text{presque tout } x, y. \end{cases}$$

# Lien entre le primal et le dual

## Proposition (dualité faible)

Si  $(\pi, J)$  admissible dans le primal et  $(\varphi, \psi, \omega)$  admissible dans le dual,

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) \leq E_r(\pi, J).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \nabla_y \varphi(x, y) = \frac{dJ}{d\pi}(x, y) & \text{pour } \pi - \text{presque tout } x, y \\ \psi(x) + \omega(y) - f(x) \cdot y = \nabla_x \cdot \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_y \varphi|^2 & \text{pour } \pi - \text{presque tout } x, y. \end{cases}$$

Dualité forte : non prouvée mais devrait se faire facilement avec le théorème de Fenchel Rockaffellar.

L'existence d'une solution optimale dans le dual est un problème ouvert, déjà dans le cas sans contrainte d'incompressibilité.

## Un cas plus général

Maintenant  $W : \mathbb{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbb{R}$  densité convexe d'énergie élastique et  $\Phi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  fonction convexe sur l'ensemble des mesures.

$$\min_{u: D \rightarrow \Omega} \left\{ \int_D (W(\nabla u(x)) - f(x) \cdot u(x)) \, dx + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) : u = g \text{ sur } \partial D \right\}.$$

## Un cas plus général

Maintenant  $W : \mathbb{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbb{R}$  densité convexe d'énergie élastique et  $\Phi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  fonction convexe sur l'ensemble des mesures.

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ \int_D (W(\nabla u(x)) - f(x) \cdot u(x)) \, dx + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) : u = g \text{ sur } \partial D \right\}.$$

Cas précédent  $W(C) = \frac{1}{2}|C|^2$  et  $\Phi(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu = \mathcal{L}_\Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

## Un cas plus général

Maintenant  $W : \mathbb{R}^{d \times k} \rightarrow \mathbb{R}$  densité convexe d'énergie élastique et  $\Phi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  fonction convexe sur l'ensemble des mesures.

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} \left\{ \int_D (W(\nabla u(x)) - f(x) \cdot u(x)) dx + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) : u = g \text{ sur } \partial D \right\}.$$

Cas précédent  $W(C) = \frac{1}{2}|C|^2$  et  $\Phi(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu = \mathcal{L}_\Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Cas compressible : on prend  $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  convexe. Alors il existe  $\Phi$  convexe sur l'ensemble des mesures positives telle que, si  $u$  lisse et injective

$$\Phi(u \# \mathcal{L}_D) = \int_D h(\det \nabla u(x)) dx.$$



# Relaxation dans le cas plus général

$\mu = u \# \mathcal{L}_D$  devient une variable à optimiser

## Primal

$(\pi, J, \mu)$  admissible si

$$\begin{cases} \pi \in \Pi(\mathcal{L}_D, \mu) \\ \nabla_x \pi + \nabla_y \cdot J = 0 \text{ dans } D \times \Omega \\ \pi(x, \cdot) = \delta_{y=g(x)} \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

et

$$E_r(\pi, J, \mu) = \iint \frac{1}{2} \left( W \left( \frac{dJ}{d\pi} \right) - f \cdot y \right) \pi + \Phi(\mu).$$

## Dual

$(\varphi, \psi, \omega)$  admissible si

$$\begin{aligned} \psi(x) + \omega(y) - f(x) \cdot y \\ \geq \nabla_x \cdot \varphi + W^*(\nabla_y \varphi). \end{aligned}$$

et

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) = \int_{\partial D} \varphi(g) \cdot \mathbf{n}_D - \int_D \psi - \Phi^*(\omega).$$

Les conditions de complémentarité imposent  $\omega \in \partial\Phi(\mu)$  à l'optimalité.

### **3. Optimalité de la relaxation et conséquences**

---

En combinant l'injection  $u \mapsto (\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  et la dualité faible,

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} E(u) \geq \min_{(\pi, J, \mu) \text{ admissible}} E_r(\pi, J, \mu) \geq \sup_{(\varphi, \psi, \omega) \text{ admissible}} E_r^*(\varphi, \psi, \omega).$$

En combinant l'injection  $u \mapsto (\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  et la dualité faible,

$$\min_{u:D \rightarrow \Omega} E(u) \geq \min_{(\pi, J, \mu) \text{ admissible}} E_r(\pi, J, \mu) \geq \sup_{(\varphi, \psi, \omega) \text{ admissible}} E_r^*(\varphi, \psi, \omega).$$

## Remarque importante

Si pour  $u : D \rightarrow \Omega$  on peut trouver  $(\varphi, \psi, \omega)$  admissible tel que

$$E_r^*(\varphi, \psi, \omega) = E(u)$$

alors  $u$  est un minimiseur global de l'énergie  $E$  et  $(\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  minimise l'énergie relaxée.

Dans ce cas la relaxation n'autorise pas de meilleurs compétiteurs.

# Convexité de la pression

## Théorème

Soit  $u : D \rightarrow \Omega$  une fonction régulière vérifiant  $u = g$  sur  $\partial D$  et  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  tels que

$$\nabla \cdot (DW(\nabla u)) + f = (\nabla \omega) \circ u.$$

Si  $\omega$  peut s'étendre sur  $\mathbb{R}^k$  en une fonction (strictement) **convexe** alors  $u$  est un (l'unique) minimiseur global de l'énergie et  $(\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  minimise l'énergie relaxée.

$\partial\Phi(\mu)$  est la sous-différentielle de la fonctionnelle  $\Phi$  au point  $\mu$ . Si  $\Phi$  est la contrainte d'incompressibilité,  $\partial\Phi(\mathcal{L}_\Omega) = C(\Omega)$ , et  $\partial\Phi(\mathcal{L}_\Omega) = \emptyset$  pour  $\mu \neq \mathcal{L}_\Omega$ .

# Convexité de la pression

## Théorème

Soit  $u : D \rightarrow \Omega$  une fonction régulière vérifiant  $u = g$  sur  $\partial D$  et  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  tels que

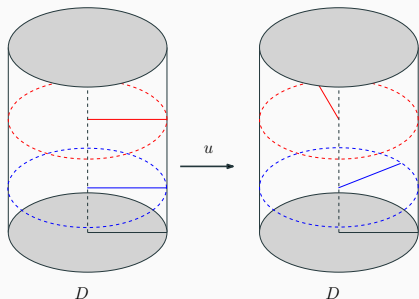
$$\nabla \cdot (DW(\nabla u)) + f = (\nabla \omega) \circ u.$$

Si  $\omega$  peut s'étendre sur  $\mathbb{R}^k$  en une fonction (strictement) **convexe** alors  $u$  est un (l'unique) minimiseur global de l'énergie et  $(\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  minimise l'énergie relaxée.

$\partial\Phi(\mu)$  est la sous-différentielle de la fonctionnelle  $\Phi$  au point  $\mu$ . Si  $\Phi$  est la contrainte d'incompressibilité,  $\partial\Phi(\mathcal{L}_\Omega) = C(\Omega)$ , et  $\partial\Phi(\mathcal{L}_\Omega) = \emptyset$  pour  $\mu \neq \mathcal{L}_\Omega$ .

*Idée de la preuve.* Même compétiteur que Brenier (dans le cas  $\Phi \equiv 0$ ) avec  $\varphi(x, y) = y^T \nabla u(x)$  et prendre le  $\omega$  donné par les conditions d'optimalité de  $u$ .

## Hypothèse optimale ?



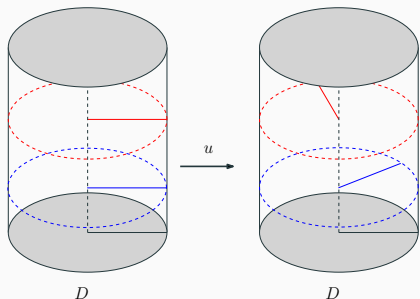
Torsion du cylindre :  $2\pi/a$  période le long de l'axe vertical.

Dans le cas  $W$  énergie de Dirichlet, la pression est

$$\omega_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{a^2}{2}(x^2 + y^2),$$

elle est  $(-a^2)$ -convexe.

## Hypothèse optimale ?



Torsion du cylindre :  $2\pi/a$  période le long de l'axe vertical.

Dans le cas  $W$  énergie de Dirichlet, la pression est

$$\omega_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{a^2}{2}(x^2 + y^2),$$

elle est  $(-a^2)$ -convexe.

En général, dans le cas  $f = 0$ , la linéarisation du problème donne les équations de Stokes :

$$\begin{cases} \Delta u & = \nabla p \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

et donc  $p \sim \omega$  vérifie  $\Delta p = 0$ , ne peut pas être convexe en général.



# Une amélioration

On se restreint au cas Dirichlet  $W(C) = 1/2|C|^2$ . On note  $\lambda_1(D) > 0$  la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet de  $D$ .

## Théorème

Soit  $u : D \rightarrow \Omega$  une fonction régulière vérifiant  $u = g$  sur  $\partial D$  et  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  tels que

$$\Delta u + f = (\nabla \omega) \circ u.$$

Si  $\omega$  peut s'étendre sur  $\mathbb{R}^k$  en une fonction  **$\lambda$ -convexe** pour  $\lambda > -\lambda_1(D)$  alors  $u$  est l'unique minimiseur global de l'énergie et  $(\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  minimise l'énergie relaxée.

On peut donc conclure à l'optimalité globale dans le cas de la torsion du cylindre au moins pour  $a$  petit. Pour  $a$  grand,  $\min E_r < \min E$ .

# Une amélioration

On se restreint au cas Dirichlet  $W(C) = 1/2|C|^2$ . On note  $\lambda_1(D) > 0$  la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet de  $D$ .

## Théorème

Soit  $u : D \rightarrow \Omega$  une fonction régulière vérifiant  $u = g$  sur  $\partial D$  et  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  tels que

$$\Delta u + f = (\nabla \omega) \circ u.$$

Si  $\omega$  peut s'étendre sur  $\mathbb{R}^k$  en une fonction  $\lambda$ -convexe pour  $\lambda > -\lambda_1(D)$  alors  $u$  est l'unique minimiseur global de l'énergie et  $(\pi_u, J_u, u \# \mathcal{L}_D)$  minimise l'énergie relaxée.

On peut donc conclure à l'optimalité globale dans le cas de la torsion du cylindre au moins pour  $a$  petit. Pour  $a$  grand,  $\min E_r < \min E$ .

*Idée de la preuve.* Il restait des degrés de liberté dans le compétiteur de Brenier.

## Une preuve plus simple de l'optimalité globale

Il suffit de remplacer  $\Phi$  par son approximation linéaire dans l'espace des mesures :

$$E(u) = \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \Phi(u \# \mathcal{L}_D)$$

# Une preuve plus simple de l'optimalité globale

Il suffit de remplacer  $\Phi$  par son approximation linéaire dans l'espace des mesures :

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) \\ &\underset{= \text{si } \omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)}{\geq} \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_{\Omega} \omega \, d(u \# \mathcal{L}_D) - \Phi^*(\omega) \\ &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_D \omega \circ u - \Phi^*(\omega) =: \tilde{E}_\omega(u) - \Phi^*(\omega). \end{aligned}$$

# Une preuve plus simple de l'optimalité globale

Il suffit de remplacer  $\Phi$  par son approximation linéaire dans l'espace des mesures :

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) \\ &\underset{= \text{si } \omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)}{\geq} \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_{\Omega} \omega \, d(u \# \mathcal{L}_D) - \Phi^*(\omega) \\ &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_D \omega \circ u - \Phi^*(\omega) =: \tilde{E}_\omega(u) - \Phi^*(\omega). \end{aligned}$$

Si  $u$  est un minimiseur global de  $\tilde{E}_\omega$  pour  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  alors c'est un minimiseur global de  $E$ . L'énergie  $\tilde{E}_\omega$  est convexe sous des hypothèses de convexité sur  $\omega$ .

# Une preuve plus simple de l'optimalité globale

Il suffit de remplacer  $\Phi$  par son approximation linéaire dans l'espace des mesures :

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \Phi(u \# \mathcal{L}_D) \\ &\underset{= \text{si } \omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)}{\geq} \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_{\Omega} \omega \, d(u \# \mathcal{L}_D) - \Phi^*(\omega) \\ &= \int_D (W(\nabla u) - f \cdot u) + \int_D \omega \circ u - \Phi^*(\omega) =: \tilde{E}_\omega(u) - \Phi^*(\omega). \end{aligned}$$

Si  $u$  est un minimiseur global de  $\tilde{E}_\omega$  pour  $\omega \in \partial\Phi(u \# \mathcal{L}_D)$  alors c'est un minimiseur global de  $E$ . L'énergie  $\tilde{E}_\omega$  est convexe sous des hypothèses de convexité sur  $\omega$ .

L'amélioration de  $\omega$  convexe à  $\omega$   $\lambda$ -convexe fonctionne si  $W$  est  $\lambda_W$ -convexe avec  $\lambda_W > 0$ .

# Conclusion

Résultats :

- Relaxation convexe d'un problème non convexe.
- La relaxation est optimale sous des hypothèses de régularité et petitesse de la solution.
- Mais les résultats peuvent être obtenus par des preuves plus simples.

# Conclusion

## Résultats :

- Relaxation convexe d'un problème non convexe.
- La relaxation est optimale sous des hypothèses de régularité et petitesse de la solution.
- Mais les résultats peuvent être obtenus par des preuves plus simples.

## Perspectives :

- Simulations numériques.
- Régularité de la pression  $\omega$  par des techniques de « régularité par dualité ».
- Convexification d'autres problèmes de calcul des variations.



# Conclusion

## Résultats :

- Relaxation convexe d'un problème non convexe.
- La relaxation est optimale sous des hypothèses de régularité et petitesse de la solution.
- Mais les résultats peuvent être obtenus par des preuves plus simples.

## Perspectives :

- Simulations numériques.
- Régularité de la pression  $\omega$  par des techniques de « régularité par dualité ».
- Convexification d'autres problèmes de calcul des variations.

**Merci de votre attention**