Mémoire d'histoire des sciences

réalisé au cours de l'année scolaire 2015-2016

dans le cadre du Master 2 LOPHISS–SPH cohabilité par l'École Normale Supérieure et l'université Paris-Diderot

L'introduction de l'enseignement des probabilités et de la statistique en France : l'exemple du *Calcul des probabilités à la portée de tous* de Fréchet et Halbwachs

Sous la direction de :

Laurent MAZLIAK

Sophie ROUX

Membre du jury :

Éric BRIAN

Écrit par :

Hugo LAVENANT

28 septembre 2016

Résumé

Le calcul des probabilités à la portée de tous, objet de ce mémoire, est un manuel traitant des mathématiques du hasard destiné à un public de non spécialistes, écrit par Maurice Fréchet et Maurice Halbwachs, et publié en 1924. Ce livre est intéressant à plus d'un titre : ses auteurs, Fréchet et Halbwachs, sont respectivement mathématicien et philosophe ; il a été écrit à l'université de Strasbourg peu de temps après la fin de la Première Guerre mondiale, une période où cette université reprise à l'Allemagne recevait d'importants moyens afin de faire rayonner la science française ; et les années 1920 coïncident en France avec la tentative de mise en place d'un enseignement de statistique et de calcul des probabilités. Pour Fréchet, l'enjeu est de proposer une présentation des mathématiques du hasard ancrée dans la pratique qui ne soit pas axiomatique ou déductive, et qui montre en quoi les méthodes statistiques, qui se justifient à l'aide du calcul des probabilités, gardent cependant une part irréductible d'arbitraire. Halbwachs veut lui aussi montrer en quoi les méthodes statistiques sont probabilistes dans leurs fondements, et délimiter leur usage et leur portée pour l'étude des faits sociaux. Le résultat est un ouvrage adoptant une organisation originale qui contraste avec les autres manuels contemporains, qui fourmille d'exemples numériques issus de statistiques réelles, et qui arrive à des analyses assez fines de ces statistiques en se cantonnant à des outils mathématiques élémentaires.

Le calcul des probabilités à la portée de tous, which is the topic of this master thesis, is a French textbook which deals with the mathematics of randomness and which targets a non specialist audience. It was written by Maurice Fréchet and Maurice Halbwachs and published in 1924. This book is worthy of interest on multiple grounds : its authors, Fréchet and Halbwachs, are respectively a mathematician and a philosopher ; it was written at Strasbourg university shortly after the end of the First World War, at a time when this university, retaken from Germany, was strongly supported by France in order to promote French science ; and a teaching in statistics and probability calculus was being set up in France in the 1920s. Fréchet wishes to present the mathematics of randomness in a concrete way, not in an axiomatic and deductive approach. He insists that statistical methods are justified by probability calculus, though some parts of them remain arbitrary. Halbwachs also wants to show that statistical methods are founded on probability calculus, and intends to mark out their use and their range in the study of social realities. The resulting book has an original structure which differs from other contemporary textbooks, it is full of numerical examples taken from real statistics, and it provides a rather subtle analysis of these statistics using only elementary mathematical tools.

Remerciements

Je me dois de remercier ici les personnes grâce à qui ce mémoire a pu être écrit.

Tout d'abord, Laurent Mazliak, qui m'a accompagné tout au long de ce qui a été ma découverte de la recherche en sciences humaines. Sa disponibilité a été sans faille et sa gentillesse sans égale ; il a réussi, je l'espère, à m'inculquer une certaine rigueur et à donner le meilleur de moi-même ; et que dire de ses remarques concernant mes tournures ≪ de mauvais journaliste ≫ qui ont permis de transformer mes premières esquisses en contenu lisible !

Beaucoup de la substance de ce mémoire provient des travaux et d'Éric Brian et de ses innombrables commentaires entendus lors des séminaires d'histoire du calcul des probabilités et de la statistique. Ses connaissances encyclopédiques, courant des points de détails de l'histoire de la sociologie aux aspects les plus techniques des enjeux mathématiques, se sont révélées inestimables pour s'orienter dans le dédale qu'est la situation de la sociologie, de la statistique, et du calcul des probabilités en France au début du 20e siècle.

Enfin, ce mémoire n'aurait pas pu exister sans Sophie Roux. Grâce à elle que l'étudiant en mathématiques que j'étais il y a quatre ans en est venu à s'intéresser à la philosophie et à l'histoire des sciences. Elle m'a appris l'existence de ces disciplines, elle m'a encouragé à faire un master dans cette spécialité, et, lorsque je lui ai dit que l'histoire et la philosophie des probabilités m'intéressaient, elle m'a orienté vers Éric Brian et Laurent Mazliak. Je crois qu'elle a réussi l'activité la plus noble du métier de professeur : la transmission de la passion pour sa discipline à ses élèves.

En plus d'Éric Brian et Laurent Mazliak, je tiens aussi à remercier le troisième organisateur du séminaire d'histoire du calcul des probabilités et des statistiques, Thierry Martin. Il est la première personne du séminaire à qui je me suis adressé, et il a su m'accueillir, me guider, et me mettre en contact avec des personnes proches de mes centres d'intérêt.

Table des matières

Abréviations

- CNRS : Centre National de la Recherche Scientifique.
- ÉNS : École Normale Supérieure.
- EPHE : École Pratique des Hautes Études.
- HEC : école des Hautes Études Commerciales.
- IECS : Institut d'Enseignement Commercial Supérieur de Strasbourg.
- IHP : Institut Henri Poincaré.
- IIS : Institut International de Statistique.
- ISUP : Institut de Statistique de l'Université de Paris.
- SGF : Statistique Générale de France.
- SSP : Société de Statistique de Paris.
- *Traité* : *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*.

Repères temporels des principaux acteurs

- Joseph Bertrand : 1822–1900.
- Émile Borel : 1871–1956.
- Pafnouti Chebychev : 1821–1894.
- Maurice Fréchet : 1878–1973.
- Maurice Halbwachs : 1877–1945
- Wilhelm Lexis : 1837–1914.
- Lucien March : 1859–1933.
- Karl Pearson : 1857–1936.
- Henri Poincaré : 1854–1912.

≪ Ainsi la réalité aidée par la durée finit toujours par incorporer le probable à l'être ≫

Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*.

Introduction

Déclarer que le mathématicien Maurice Fréchet et le philosophe Maurice Halbwachs ont écrit ensemble un manuel de calcul des probabilités, *Le calcul des probabilités à la portée de tous* [1], suscite bien souvent l'étonnement. Assez rares sont les personnes qui connaissent les deux auteurs dont le nom est attaché à des univers disjoints. Pour les sociologues et les philosophes, le nom d'Halbwachs évoque un héritier de Durkheim, mais l'apport de ses travaux, notamment en ce qu'ils préfigurent certains aspects de la sociologie moderne, plus quantitative, a pendant longtemps été méconnu. Quant au nom de Fréchet, les mathématiciens le relient aux ≪ espaces de Fréchet ≫ ou à la notion de ≪ différentielle au sens de Fréchet ≫, et tous ne savent pas qu'il a apporté des contributions à la théorie des probabilités et aux statistiques. Deux auteurs, donc, qui ont écrit ensemble un livre dont on ne penserait pas qu'ils puissent l'écrire, même séparément. Ce manuel n'est pas destiné aux spécialistes : comme le titre l'annonce, le but est de faire comprendre un certain nombre de concepts et de résultats du calcul des probabilités en ne partant que de connaissances élémentaires, afin que le plus grand nombre puisse le lire. Cet ouvrage a été écrit à l'université de Strasbourg et fut publié en 1924, c'est-à-dire seulement quelques années après la fin de la Première Guerre mondiale. Après avoir repris l'université à l'Allemagne, le gouvernement français souhaitait qu'elle rayonne et serve à montrer la supériorité culturelle et scientifique française, ce qui explique que l'université était particulièrement vivace. *Le calcul des probabilités à la portée de tous* est donc un livre transdisciplinaire, pas seulement destiné aux personnes ayant reçu une éducation scientifique poussée, écrit dans une université en pleine reconstruction autorisant des mariages aussi étranges que celui d'un mathématicien avec un philosophe, et publié dans les années 1920, une période où le calcul des probabilités et la statistique sont en mutation rapide. Un livre, en somme, qui mérite que l'on s'y intéresse.

Le calcul des probabilités et la statistique sont maintenant des outils utilisés de manière intensive, dans de nombreux versants de la science contemporaine, et notamment pour saisir les enjeux économiques et sociaux. Alors que la naissance du calcul des probabilités s'est cristallisée autour des jeux de hasard, il a progressivement été perçu comme un des modes les plus fondamentaux d'accès à la connaissance. Quand il s'agit de mettre un médicament sur le marché, il est obligatoire de mener une étude afin de connaître ses effets et sa dangerosité, étude qui se conduit et qui s'analyse à l'aide d'outils probabilistes. Quand il s'agit, au niveau de l'état, d'évaluer les conséquences d'une politique publique, la statistique est l'outil privilégié.

1. [Fréchet et Halbwachs, 1924].

Quand il s'agit, pour un journaliste, de vouloir construire le concept d'opinion publique, c'est la technique du sondage, probabiliste dans ses fondements, qui est utilisée. Quand il s'agit, pour l'actuaire, de déterminer la juste prime de l'un de ses produits d'assurance, le calcul des probabilités devient incontournable. Enfin quand il s'agit, pour le biologiste, l'économiste, ou le physicien, de construire un modèle théorique, personne ne sera étonné de lire « une variable aléatoire suivant une loi normale a été rajoutée ici pour modéliser le bruit ». Ce n'est qu'au cours du 20e siècle que ce style de raisonnement probabiliste s'est imposé dans l'ensemble des domaines de la connaissance. Progressivement, le calcul des probabilités a quitté l'étiquette d'une connaissance incertaine et floue qu'il véhiculait et a été reconnu comme un outil indispensable à la connaissance scientifique. « Il faut quitter le monde aux arêtes vives de la certitude pour entrer dans le royaume flou des approximations », écrivait Cavaillès en 1940, « la probabilité, bâton d'aveugle, peut seule nous mener dans le chemin de l'avenir – s'il y a un chemin »[2]. Un exemple emblématique est celui du livre *The design of experiments* de Ronald Fisher (première édition en 1935) : cet ouvrage explique comment concevoir et analyser une expérience pouvant conduire à rejeter une hypothèse, sans préjuger du domaine sur lequel cette hypothèse ou cette expérience porte. C'est-à-dire que la méthode présentée dans ce livre, conçue à la base pour étudier l'efficacité des fertilisants agricoles, a pu par exemple servir à discriminer entre différentes approches pédagogiques à l'école élémentaire aux États-Unis. Le calcul des probabilités n'est plus lié à un domaine particulier, il devient une méthode universelle.

Cette utilisation massive du calcul des probabilités a été le fait de non-mathématiciens. Il a donc fallu enseigner le calcul des probabilités aux actuaires, ingénieurs, biologistes, etc., c'est-à-dire aux personnes qui l'utilisaient concrètement et pas seulement à celles qui allaient en faire leur objet d'étude et s'intéresser à ses ramifications abstraites. Or, le calcul des probabilités est un domaine des mathématiques s'appuyant sur des concepts comme ceux de probable ou d'espérance qui sont durs à appréhender, et son enseignement est par conséquent délicat : il risque bien vite de tourner à l'apprentissage sans recul de formules et d'algorithmes de calcul. C'est d'autant plus problématique que le calcul des probabilités représente bien souvent le fondement épistémologique des méthodes utilisées par la suite par ceux à qui on l'enseigne : mal enseigner le calcul des probabilités est l'assurance d'avoir des actuaires, biologistes, et ingénieurs qui ne peuvent créer des méthodes nouvelles et se contentent d'appliquer sans réfléchir celles qu'ils ont apprises. L'enjeu était d'autant plus important au début du 20e siècle que les méthodes probabilistes et statistiques n'étaient pas encore fixées : le débat portait justement sur la nature, la portée et la modalité d'utilisation de ces méthodes. L'enseignement du calcul des probabilités pendant cette période a donc durablement marqué et défini l'utilisation qui en a été faite en pratique par la suite.

Ce qui précède permet de comprendre en quoi le contenu même du *Calcul des probabilités à la portée de tous* possède un intérêt, au delà du fait qu'il a été écrit par les auteurs et dans les circonstances rappelés plus haut. Manuel d'enseignement à destination à destination de ceux qui

2. [Cavaillès, 1940, p. 154].

vont utiliser le calcul des probabilités et non ceux qui vont en faire la théorie, les mathématiques du hasard sont présentés en vue de leur application, et le livre laisse transparaître la façon dont elles devraient être utilisées et la valeur de la connaissance qu'elles procurent. Halbwachs était d'ailleurs, parmi les héritiers du « fondateur » de la sociologie Émile Durkheim, celui qui a le plus insisté sur l'usage des méthodes quantitatives en sociologie, il a cherché à définir le rôle du calcul des probabilités et de la statistique en sociologie.

Plus concrètement, que contient ce livre de 297 pages ? Il s'agit d'une présentation du calcul des probabilités, des résultats les plus classiques aux avancées contemporaines les plus récentes, qui ne s'appuie que sur des mathématiques élémentaires. C'est-à-dire qu'à part la manipulation de fractions et les identités remarquables, aucune autre connaissance mathématique n'est requise : Fréchet et Halbwachs exploitent alors au maximum ces outils élémentaires. Ils partent d'une définition empirique de la probabilité, qui leur sert pour déduire les théorèmes fondamentaux de la théorie (ceux des probabilités totales et composées). S'ils abordent aussi les probabilités continues, la probabilité des causes, ou l'espérance, comme le font les autres manuels français qui les ont précédés (celui de Bertrand de 1889 ou de Poincaré de 1896), l'originalité de leur ouvrage réside dans leur traitement des lois limites (la loi des grands nombres et le théorème central de la limite). Sans faire appel au calcul intégral (contrairement à leurs prédécesseurs), ils arrivent à donner une intuition de ces lois limites et montrent comment elles servent pour analyser des statistiques telles que le *sex ratio* [3], le nombre de mariages, ou encore la mortalité.

Le présent mémoire s'organise de la façon suivante : si la deuxième partie propose une lecture attentive et quelques remarques sur le contenu du *Calcul des probabilités à la portée de tous*, la première partie cherche, elle, à contextualiser et à fournir tous les éléments nécessaires à une lecture critique.

Plus précisément, la première partie s'ouvre avec une histoire de l'enseignement du calcul des probabilités en France jusqu'à l'entre-deux-guerres. Cette histoire n'apporte aucun élément original et s'appuie sur les travaux d'autres historiens mais nous paraît indispensable pour mieux comprendre le mouvement général dans lequel s'inscrit la publication, en 1924, du *Calcul des probabilités à la portée de tous*. S'ensuivent une description de ce qui fait la singularité de l'université de Strasbourg cette année là ainsi que la présentations des deux auteurs. Pour chacun des deux, des éléments bibliographiques sont proposés pour les situer, mais nous insistons surtout sur leurs vues quant au calcul des probabilités et à la statistique. Fréchet a eu en effet des idées tranchées à propos de l'enseignement et l'utilisation des mathématiques du hasard, notamment en sciences humaines ; et Halbwachs a lui beaucoup réfléchi sur les conditions d'utilisation du calcul des probabilités en sociologie. Enfin, la réception de l'ouvrage est évoquée. Sur ce point, faute de documentation, nous nous sommes contentés de dresser la liste des recensions consécutives à la publication de l'ouvrage et les renvois qui y sont faits dans la littérature

3. Le rapport du nombre de garçons nés au nombre total de naissances.

académique par la suite. À défaut d'exhaustivité, nous espérons au moins que cette énumération donne une idée de l'accueil fait au *Calcul des probabilités à la portée de tous* et permet d'envisager la façon dont la communauté académique l'a perçu par la suite.

La deuxième partie commence par un résumé détaillé de l'ouvrage, dans lequel nous avons tenté de restituer la structure argumentative et de souligner les passages qui nous semblent importants. Ce résumé est suivi de remarques plus longues qui concernent des aspects transversaux à l'ensemble du livre et qui auraient difficilement pu s'intégrer dans le résumé.

En plus du travail présenté ici, notre lecture du *Calcul des probabilités à la portée de tous* s'est accompagnée d'une série d'annotations qui devrait être publiée aux Presses Universitaires de Strasbourg dans une réédition critique du livre dont Éric Brian, Laurent Mazliak, et moi-même sommes les rédacteurs.

Chapitre 1

Contexte

1.1 Une histoire de l'enseignement des probabilités et de la statistique en France

Afin de mieux comprendre le contexte dans lequel s'est écrit *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, il est utile de commencer par brosser un rapide tableau de l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques en France entre la fin du 18e siècle et la première moitié du 20e siècle. Ce tableau nous permettra de montrer le mouvement plus général dans lequel s'inscrit cet ouvrage, à savoir la redéfinition progressive du rôle de la statistique et l'introduction du calcul des probabilités comme son fondement. Ce tableau n'a pas prétention à l'originalité, il s'appuie sur les travaux [Pressat, 1987], [Morrisson, 1987], [Armatte, 1991] et [Meusnier, 2006].

1.1.1 Une mise en place difficile en France...

L'année 1786 est celle qui contient la première trace d'un enseignement collectif relatif au calcul des probabilités en France. Le calcul des probabilités lui-même est bien plus ancien, puisqu'on fait remonter traditionnellement son invention aux échanges épistolaires entre Blaise Pascal et Pierre Fermat au milieu du 17e siècle. L'enjeu de ces échanges était le problème des partis, c'est-à-dire la répartition équitable des gains si un jeu de hasard est interrompu avant sa fin. C'est ce problème en apparence anodin, couplé à un contexte intellectuel favorable [1], qui a été le point de départ du calcul des probabilités (ou plutôt du calcul des espérances, puisque seul le concept d'espérance apparaît dans les écrits de Pascal [2]). Mais l'enseignement institutionnalisé du calcul des probabilités ne semble pas être une priorité pour ceux qui le pratiquent tout au long des 17e et 18e siècles. Quant à la statistique, elle peut renvoyer à ce moment soit à

1. Voir [Coumet, 1970] pour plus de détails.
2. Comme l'explique [Cléro, 2006], si Fermat voit le problème comme une question de dénombrement, Pascal comprend que l'enjeu est de produire un discours fondé sur la notion d'équité qui puisse être accepté par les deux joueurs.

la description qualitative d'un pays en vue de son gouvernement par l'État, telle que pratiquée dans les universités germaniques, soit à l'arithmétique politique anglaise qui ne possède pas de lieu de diffusion institutionnel, que ce soit en Angleterre ou en France. Signalons ici que c'est d'ailleurs de « *Staat* » (qui signifie « État » en allemand), que le mot « statistique » tire son origine. L'année 1786 est celle où Condorcet propose pour la première fois, dans le cadre d'un cours de mathématiques donné dans une institution privée [3], une leçon sur le calcul des probabilités, ou plus précisément une leçon dont l'intitulé exact est le suivant :

> Enfin, dans la sixième et dernière partie, on traitera du calcul de l'intérêt de l'argent, de la manière de former les tables de mortalités, ou d'en tirer des résultats, de la méthode d'appliquer aux jeux de hazard la théorie des combinaisons, et de questions diverses relatives au calcul des probabilités. [4]

Comme l'explique Meusnier, nous ne sommes pas sûrs que la partie dédiée au calcul des probabilités, reléguée à la fin de son cours, ait réellement été présentée. Condorcet serait ainsi seulement le premier en France à avoir annoncé qu'il allait dispenser un enseignement de calcul des probabilités dans un cadre institutionnel. Sa motivation est la formation de citoyens éclairés : enseigner le calcul des probabilités aux citoyens est utile, car, armés de celui-ci, ces derniers seront plus aptes à juger des problématiques politiques et sociales [5].

Le premier cours de probabilité effectivement donné en France est sans doute la leçon de Laplace en 1795 à l'École normale de l'an III, embryon de ce qui donna lieu par la suite à la publication en 1814 de son célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*. L'École normale étant dissoute cette même année 1795, le cours ne fût donné qu'une fois. Il faut attendre les années 1830 pour que le calcul des probabilités soit de nouveau enseigné dans la nouvelle École normale (refondée par Napoléon en 1808), mais seulement pour une dizaine d'années. Et il ne faut pas oublier que les promotions sont plutôt petites et que cet enseignement n'est donc dispensé qu'à quelques dizaines d'élèves. L'impact des cours donnés à l'École Normale est donc à relativiser.

Du côté de ce qui devînt par la suite l'École polytechnique (à ses débuts l'École centrale des travaux publics), un enseignement est mis en place de façon régulière à partir de 1819 et est assuré par François Arago jusqu'en 1830. Par la suite, ce sont Félix Savary, puis Jospeh Liouville et Charles-François Sturm qui s'en occupent. À partir de 1854 et jusqu'en 1894 (du moins pendant les années paires) la charge revient à Joseph Bertrand (1822-1900). Après le départ à la retraite de Bertrand, le cours de calcul des probabilités est inclus dans les cours

3. Celle créée par Pilâtre de Rozier, cf. [Meusnier, 2006, p. 6] pour plus de détails.
4. Cet intitulé provient de [Meusnier, 2006, p. 6].
5. À titre d'exemple, un des sujets d'étude de Condorcet concerne la composition des jurys : il cherche à trouver le nombre de personnes nécessaires dans un jury, ainsi que la procédure de vote, afin que la probabilité de condamner un innocent et celle de laisser échapper un coupable soient faible. Ce travail fut poursuivi par Laplace, et surtout par Poisson qui développa pour cela ce qu'il appelle la loi des grands nombres (cf. section 2.2.3 pour les détails mathématiques). Mais face à la réaction très négative des contemporains de Poisson, qui moquèrent ses travaux sans réellement les lire, ce type de problématique ne fut pas poursuivi (Bertrand s'en moque dans son manuel de 1889). On pourra notamment lire [Bru, 2005, section 1.3] pour plus de détails.

d'astronomie et de géodésie (comme préliminaire à la théorie des erreurs), et ce jusqu'en 1919. Entre 1904 et 1907, ces préliminaires sur le calcul des probabilités et la théorie des erreurs sont assurés par Henri Poincaré (1854–1912). Ce dernier, qui occupe de 1886 à 1896 la chaire de calcul des probabilités à l'université de Paris, y enseigne les probabilités en 1891-1892 et en tire en 1896 un manuel, *Calcul des probabilités*, qui devient la nouvelle référence se substituant au manuel de Bertrand de 1889. De plus, bon nombre des élèves de l'École polytechnique passent par l'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz, qui utilise le calcul des probabilités pour estimer la précision des canons. Comme cela est raconté dans [Bru, 1996], les résultats des calculs balistiques s'éloignaient fortement de la réalité à cause de l'inadéquation des hypothèses théoriques (boulet idéalement sphérique, canon idéalement lisse, combustion simpliste). À partir de 1858, Isidore Didion de l'école de Metz, s'est rendu compte qu'il est possible d'utiliser la loi des erreurs bidimensionnelle pour décrire la répartition des boulets autour d'une cible : entre expérimenter (et se contenter d'un ajustement entièrement empirique) et théoriser (à l'aide d'hypothèses beaucoup trop simplificatrices), l'école de Metz avait choisi de « faire la théorie des expériences elles-mêmes » [6]. De sorte que les polytechniciens reçoivent un enseignement en calcul des probabilités à travers son application au tir des canons. Au delà de l'énumération monotone des noms des brillants mathématiciens qui se sont succédés devant les élèves, deux remarques s'imposent. Tout d'abord, cet enseignement, contrairement à celui donné à l'École normale, touche de nombreux élèves (une centaine par an) et devient ainsi la source principale de formation des élites scientifiques françaises au calcul des probabilités. Mais surtout, les motivations se sont progressivement éloignées de celles de Condorcet. Alors qu'à sa mise en place en 1819 certains espèrent encore que les applications du calcul des probabilités aux questions morales soient enseignées, le contenu devient progressivement de plus en plus mathématique, valorise l'habileté technique, et les questions touchant à l'arithmétique sociale ou à la démographie sont peu à peu évacuées.

Quant à l'enseignement de la statistique, il est au cours du 19e siècle séparé de celui des probabilités. La statistique, au sens de description de l'état en vue de son gouvernement, est vue comme une discipline d'appoint qui apparaît dans des enseignements de géographie, d'économie, de démographie, etc. L'accent est mis sur la collecte des données, leur mise en forme et éventuellement leur comparaison, mais cela ne va pas au delà du calcul d'une moyenne ou du dressage d'un tableau. La discipline peut être qualifiée de littéraire : les observations chiffrées sont utilisées pour illustrer un raisonnement, comme une possibilité rhétorique, mais elles ne sont pas à la base de l'analyse. La plus ancienne chaire française comprenant le mot « statistique » dans son intitulé (*Administration et statistique industrielle*) date de 1854 et est créée au Conservatoire national des arts et métiers. On trouve aussi des traces d'enseignement de la statistique à l'École d'anthropologie, à l'École des sciences politiques ou dans les facultés de droit (notamment à la faculté de droit de Bordeaux à partir des années 1890). Certaines ten-

6. [Bru, 1996, p. 41].

tatives de mise en place d'un enseignement de statistique échouent faute d'un auditoire assez nombreux : c'est notamment le cas lorsque Pierre Émile Levasseur veut organiser un enseignement sur la méthode statistique en démographie au Collège de France, ou encore lorsque la Société de Statistique de Paris (SSP) organise des conférences sur la statistique entre 1883 et 1885 [7].

1.1.2 ... qui contraste avec la situation dans les autres pays européens

Au contraire, vers la fin du 19e siècle, dans les pays anglo-saxons, la statistique est en plein essor. Francis Glaton (1822–1911), cousin de Charles Darwin, ne s'intéresse plus seulement à la moyenne des caractéristiques des individus comme le faisait Adolphe Quetelet, mais à la dispersion des caractéristiques autour de la moyenne. Cette étude est sous-tendue par une perspective eugéniste : certaines caractéristiques sont reliées à la « valeur sociale » des individus, et parmi ceux qui s'écartent le plus de la moyenne se trouvent les « moins aptes socialement » qu'il s'agit, à long terme, de faire disparaître. Une question centrale, liée à la théorie de l'évolution de Darwin, est de savoir comment la distribution des caractéristiques est modifiée lors du passage d'une génération à une autre. Galton tire de cette question l'idée de régression à la moyenne : si l'on prend l'exemple de la taille des individus, à une taille des parents fixée, les tailles des enfants seront plus proches de la moyenne que ne le sont celles de leurs parents [8].

Ses travaux sont repris par Karl Pearson (1857–1936), qui apporte un savoir mathématique que Galton ne possède pas. Pearson construit de nouveaux outils (comme le coefficient de corrélation) et change le rôle attribué à la statistique qui devient le langage du raisonnement inductif. Pearson s'inspire de la philosophie des sciences d'Ernst Mach : la causalité est une routine de perceptions établie en vue d'une logique d'action, elle ne reflète pas la réalité en soi. Plutôt que de rechercher des lois causales, Pearson préfère calculer des coefficients de corrélation. Ces derniers permettent de distinguer entre une dépendance ou une indépendance totale des phénomènes. Il ne sert à rien de chercher une explication causale au delà, le coefficient de corrélation suffit comme moyen d'économie de la pensée, et la science n'est autre chose qu'une économie de la pensée. De plus, Pearson use de son poids institutionnel pour que ses idées soient diffusées : il crée notamment deux laboratoires (un d'eugénisme et un de biométrie). Dans ces laboratoires, Pearson, ainsi que d'autres pionniers des statistiques anglo-saxonnes, font venir des scientifiques issus de disciplines variées (biologistes, ingénieurs, chimistes, médecins, etc.) pour qu'ils apprennent les statistiques puis les diffusent. Ainsi, au début du 20e siècle, c'est le rôle du statisticien comme expert qui est en train de naître.

7. Cette information est tirée de [Morrisson, 1987].

8. En langage mathématique moderne, si X est la taille des parents et Y celle des enfants, alors il existe un coefficient $0 < a < 1$ tel que $(Y - m) = a(X - m) + \varepsilon$, où m est la taille moyenne et ε suite une loi normale centrée. Cette formule permet d'expliquer pourquoi la variance de Y est identique à celle de X, c'est-à-dire pourquoi la dispersion des tailles des individus ne change pas d'une génération à une autre, quand bien même, conditionnellement à la taille des parents X, la taille des enfants Y est en moyenne plus proche de m que ne l'est X. C'est d'ailleurs cette « régression à la moyenne » qui a donné son nom à ce que l'on appelle maintenant la « régression linéaire ».

En Allemagne, la statistique administrative se développe assez rapidement à partir de 1871. Des enseignements de statistiques sont organisés pour former les nombreux fonctionnaires qui travaillent dans les services de statistique. Les universités accueillent des chaires de statistique, et des séminaires ont lieu de façon régulière. Ce modèle allemand (création de chaires de statistique auxquelles on adjoint des séminaires) s'exporte aux États-Unis ou encore au Danemark, en Autriche et en Italie.

Le 19e siècle est aussi une période prolifique pour la statistique nordique. Dans la suite des travaux de Gauss sur l'estimation [9], les astronomes, géodésistes et actuaires scandinaves ont proposé d'autres façons d'estimer des grandeurs à partir de séries d'observations. Ils ont notamment discuté la question de savoir comment juger de la pertinence d'un estimateur en allant au delà de la méthode des moindres carrés. Figure typique de ces années, le danois Thorvald Nicolai Thiele (1838–1910) travailla sur la théorie de l'interpolation, la méthode des moindres carrés, les cumulants, l'analyse de la variance, etc [10]. Les travaux de Thiele, bien que très novateurs, ont été assez méconnus des anglo-saxons, notamment de K. Pearson ou Ronald A. Fisher. D'abord parce que, selon Lauritzen, ses textes n'étaient pas d'une grande clarté, mais surtout parce qu'il n'arrivait pas à abstraire les méthodes qu'il inventait et à montrer leur potentiel au delà des cas particuliers sur lesquels il les avait développées.

La Russie est aussi pionnière en ce qui concerne le calcul des probabilités et la statistique, elle est le lieu d'expérimentations de nouvelles techniques statistiques, expérimentations qui se font en lien avec le monde universitaire. En effet, si la Russie possède depuis 1811 un bureau centralisé de statistique articulant un réseau de notables à travers tout le pays, ces derniers ne sont pas compétents en statistique et ont du mal à produire régulièrement des données chiffrées. En 1864 sont créées les *zemstva*, des administrations dont le rôle est de gérer les intérêts économiques locaux. Pour collecter les renseignements en vue de cette tâche ainsi que pour lever des impôts, les *zemstva* ont recours à des statisticiens. Ces statisticiens des *zemvsta* possèdent une formation universitaire avancée. Beaucoup sont victimes d'un exil politique qui les force à quitter Moscou, et ils sont accueillis par les *zemstva* qui ne sont pas non plus favorables au tsar. Grâce à des sociétés de statistique actives, les échanges entre différents *zemstva* sont courants et les statisticiens des *zemstva* constituent une communauté professionnelle à part entière. Compte tenu des contraintes financières, les statisticiens des *zemstva* sont forcés d'innover et de mettre en place de nouvelles méthodologies statistiques : des sondages avec échantillonnage aléatoire sont ainsi effectués à partir de 1896, alors que d'habitude c'est le statisticien qui choisissait les villages « typiques » qu'il incluait dans son échantillon. Et ces

9. Gauss a introduit dans la théorie de l'estimation, pour reprendre les mots de [Desrosières, 2010, section 4], le triplet moyenne – méthode des moindres carrés – loi des erreurs. Ces trois concepts se soutiennent mutuellement et forment un tout cohérent : en appliquant la méthode des moindres carrés, l'estimateur obtenu est la moyenne ; et en supposant des erreurs distribuées selon la loi des erreurs, la moyenne est l'estimateur qui maximise la probabilité *a posteriori*.

10. Pour plus de détails sur les travaux de Thiele, nous renvoyons à [Lauritzen, 2002].

nouvelles méthodes font ensuite l'objet de discussions lors de congrès. Sans compter que ces statisticiens des *zemstva* sont en contact avec les enseignants de statistique de l'université de Moscou, et sont ainsi poussés à la formalisation de leurs techniques [11].

La Russie possède aussi à Saint Petersbourg, sous la houlette de Pafnouti Chebyshev (1821–1894) puis de ses élèves Andreï Andreïevitch Markov (1856–1922) et Alexandre Lyapunov (1857–1918), une école en calcul des probabilités, qui se concentre notamment sur la clarification et la démonstration des théorèmes limites comme la loi des grands nombres ou le théorème central de la limite. L'école de calcul des probabilités de Saint Petersbourg est pour sa part peu en contact avec ces statisticiens des *zemstva*

Cette effervescence contraste de façon saisissante avec la pauvreté de l'enseignement de la statistique en France. Des rapports publiés dans le *Bulletin du conseil supérieur de la statistique*, écrits par Jean-Jacques Cheysson (en 1890) et Fernand Faure (en 1894), montrent que les statisticiens du conseil supérieur de la statistique sont au courant de ce retard et proposent des pistes d'explication : dans les autres pays, les bureaux de statistiques comprennent de nombreux membres, des séminaires sont organisés régulièrement, ce qui a pour effet de maintenir une dynamique de recherche ; au contraire en France les structures sont petites et rigides, de plus l'administration ne promeut pas les compétences statistiques, de sorte que des études dans ce domaine n'offrent aucune perspective de carrière. En France, les agents effectuant des travaux de statistique dans les ministères ou les préfectures n'ont pas reçu de formation particulière à ce sujet. Même lorsque le conseil supérieur de la statistique propose l'organisation de stages de statistique à destination de ces agents, le ministère de l'intérieur refuse au nom de l'indépendance des préfets [12]. Puisque les agents s'occupant de statistiques sont éparpillés sur tout le territoire et répartis dans différentes administrations, la création d'un corps de statisticien est impensable. Face à ces difficultés, la solution proposée par ces rapports est l'introduction d'épreuves de statistiques dans les concours de l'administration : « L'attrait du sujet (la statistique et ses méthodes) ne suffit pas : il faut y ajouter l'incitation des examens et mettre en jeu l'intérêt du candidat » [13]. Cette solution est rejetée : les ministères refusent de changer leurs concours de recrutement.

1.1.3 Changements au début du 20e siècle

La situation commence à changer au début du 20e siècle, et ce à deux titres : au niveau conceptuel, on assiste à un rapprochement entre statistique et calcul des probabilités voire à une redéfinition de ce qu'est la statistique, et au niveau institutionnel de nouveaux espaces d'enseignement sont créés. Ces changements sont impulsés par des individus isolés (comme Lucien

11. Pour plus de détails on pourra consulter [Mespoulet, 2001].
12. Les administrations refusent de donner des indemnités de transport aux stagiaires, belle preuve de mauvaise volonté !
13. Extrait du rapport de Cheysson (1890) cité dans [Morrisson, 1987, p. 815].

March ou Émile Borel), qui, à l'instar de Condorcet 150 ans auparavant, promeuvent la statistique car ils pensent qu'elle est utile à la société. Nous nous appuyons dans la suite sur les articles [Armatte, 2005], [Mazliak, 2010], [Catellier et Mazliak, 2012] et [Bustamante *et al.*, 2015], qui se concentrent sur cette période.

À partir des années 1890, la statistique change de statut : d'une discipline littéraire, descriptive, centrée sur l'État, elle en vient à utiliser des outils mathématiques plus poussés (coefficient de corrélation, méthode des moindres carrés) dont certains sont fondés sur des hypothèses probabilistes (notamment celle d'une distribution des erreurs selon la loi normale). Mais surtout, pour certains comme K. Pearson, elle est appelée à devenir la description générale de la méthode scientifique, la « grammaire de la science » pour reprendre le titre de l'un de ses ouvrages. Les mathématiques semblent nécessaires pour faire de la statistique : par exemple Hermann Laurent, membre de l'Institut des actuaires français, qui a tenté de diffuser le contenu mathétmatique de l'œuvre probabiliste de Laplace dans la deuxième moitié du 19e siècle [14], se plaint dans un ouvrage intitulé *Statistique mathématique* ([Laurent, 1908]) et publié en 1908, du faible niveau en mathématique des administrateurs [15], et appelle de ses vœux à l'utilisation du calcul des probabilités dans le traitement des données statistiques. Son ouvrage n'est d'ailleurs pas forcément à la hauteur de ses prétentions, en ce qu'il n'est que la juxtaposition de petits problèmes qui touchent à la statistique et qui sont résolus à l'aide d'outils du calcul des probabilités, mais sans qu'il n'y ait de réelle cohérence ou de fil directeur dans l'ouvrage. Un personnage plus intéressant qui pense le nouveau rapport qui s'institue entre calcul des probabilités et statistique est Lucien March (1859-1933), un polytechnicien qui fût membre de la Statistique Générale de France (SGF) entre 1901 et 1919. Pour lui, les mathématiques sont indispensables pour faire de la statistique, mais le calcul des probabilités est par contre à rejeter : en effet, ce calcul présuppose certaines lois comme données *a priori* alors que la statistique doit avoir une approche empirique, et il se fonde sur l'indépendance des événements alors que les propriétés statistiques n'ont de sens que parce que les événements considérés forment un tout et ne sont absolument pas indépendants [16]. Il appuie ses dires en introduisant en 1910, dans son *Essai sur un mode d'exposer les principaux éléments de la Théorie Statistique* ([March, 1910]), les notions mathématiques de moyenne, de variabilité et de covariation sans faire appel au calcul des probabilités. Pour introduire ces notions, il ne s'appuie que sur « les principes fondamentaux de la logique, le sentiment d'équité, [et] celui de la faiblesse des capacités d'observation » [17] : par exemple, la moyenne s'appuie sur le principe d'équité, puisque si différents lots d'une même marchandise sont livrés, la quantité moyenne par lot est la quantité qu'il faudrait que le client demande pour chaque lot afin que « *le total des quantités livrées soit égal au total des quantités*

14. Cf. [Bru *et al.*, 2012].
15. On trouve dès les premières lignes cette formule pleine de nuance : « les statistiques officielles sont dirigées par des gens incompétents » ([Laurent, 1908, p. III]).
16. Halbwachs émet une critique similaire, elle sera discutée plus en détail dans la partie 1.4.2.
17. [March, 1910, p. 448].

demandées »[18], c'est-à-dire afin que le marché soit équitable. March a aussi traduit et préfacé en 1912 la troisième édition de la *Grammaire de la science* de K. Pearson, la préface montre l'adhésion de March aux thèses philosophiques de Pearson[19]. Borel et ses successeurs se sont cependant écartés du vœu de March d'une statistique mathématique sans probabilité et ont fini par imposer leurs vues.

Émile Borel fût un promotteur infatiguable de l'usage du calcul des probabilités, aussi bien sur la scène scientifique que dans l'espace public. Né en 1871, il entre à l'École Normale Supérieure (ÉNS) en 1889 pour y étudier les mathématiques. Sa thèse, soutenue en 1894, porte sur le prolongement analytique des fonctions. Il est pendant un temps séduit par l'approche logiciste de Georg Cantor qu'il utilise notamment dans sa thèse, mais il prend progressivement ses distances avec une voie purement axiomatique et sans ancrage concert. Ce rejet de l'approche logiciste est un des facteurs qui explique son intérêt pour le calcul des probabilités, et le début de ses travaux à ce sujet date de 1905. Ce changement d'orientation, analysé en détail dans [Mazliak et Sage, 2014], est dicté par la conviction que l'usage des probabilités permet de *saisir le réel*, et ce, en deux sens. Tout d'abord *saisir* l'ensemble (mathématique) des nombres réels, puisque la notion de nombre « tiré au hasard » permet de parler des propriétés des nombres sans qu'il soit nécessaire de les exhiber individuellement, notamment sans qu'il soit nécessaire de les construire. Ainsi Borel peut se détacher du logicisme de Cantor et néanmoins manipuler les réels sans être enfermé dans un constructivisme trop étroit. Mais aussi *saisir* la réalité sociale, puisque beaucoup de questions de la vie courante ou posées par les sciences sociales admettent pour Borel des réponses probabilistes[20]. L'esprit de Condorcet resurgit puisque selon Borel les probabilités sont utiles au citoyen, que ce soit dans sa vie courante, ou pour prendre des décisions politiques, et c'est en ce sens qu'elles doivent être diffusées et ne pas être limitées aux applications à la physique et aux mathématiques. Par exemple, Borel utilise le calcul des probabilités pour discuter de l'analyse graphologique d'Alfred Binet. Après l'affaire Dreyfus et les accusations fantaisistes d'Alphonse Bertillon à l'encontre de Dreyfus fondées sur la graphologie, Borel se fait, en commentant les travaux de Binet et en conduisant lui-même un test graphologique, l'avocat de l'utilisation du calcul des probabilités pour asseoir la graphologie sur des bases scientifiques[21]. Borel se donne les moyens de diffuser ses convictions et prend graduellement de plus en plus part à la vie politique. Dès 1905, il fonde avec sa femme Marguerite Appel[22] (qui publie sous le nom Camille Marbo) un journal, *La Revue du mois*[23], qui lui permet de diffuser ses idées dans les cercles académiques et intellectuels. Lorsque la Première

18. [March, 1910, p. 449].
19. Cf. [Armatte, 2005] pour plus de détails.
20. Son exemple favori est celui du paradoxe sorite : s'il n'est pas possible de juger précisément à partir de combien de grains de blés on est en présence d'un tas, cette question admet néanmoins comme réponse un coefficient de probabilité. Pour le lecteur intéressé, [Égré et Barberousse, 2014] analyse précisément la proposition de Borel et la compare avec les travaux publiés par la suite sur le concept de « vague ».
21. Cf. [Mazliak, 2012].
22. Fille du mathématicien Paul Appell, c'est une écrivaine, lauréate du prix Femina en 1913.
23. Pour plus de détails sur la création de cette revue, on pourra consulter [Durand et Mazliak, 2011, section 2.2].

Guerre mondiale éclate, il se porte volontaire (en 1915, à 44 ans) et applique au front des techniques mathématiques pour repérer les canons ennemis au bruit. Il est à la tête de la Direction des inventions intéressant la défense nationale à partir de 1915 et passe même en 1917 quelques mois en tant que secrétaire à la présidence du Conseil. Cette expérience de la « politique des grands nombres » est fondamentale : pour la première fois, Borel est réellement confronté à une avalanche de données statistiques et est alors convaincu de la nécessité d'une collecte efficace et d'un traitement intelligent des statistiques de terrain. Il exprime ce point de vue dans un article publié en 1920 dans le journal de la SSP :

> Le nombre et l'importance matérielle des documents statistiques augmente chaque jour dans tous les pays ; on se rend mieux compte, en effet, de l'importance qu'il y a à posséder des statistiques suffisamment détaillées pour qu'elles soient utilisables à des fins diverses. Les phénomènes sociaux sont trop complexes pour qu'il soit possible de les enfermer dans des formules trop simplifiées. Mais, d'autre part, pour lire et interpréter des documents statistiques considérables, il faut, non seulement une éducation spéciale, mais beaucoup de temps. [24]

Et puisque les gouvernants n'ont pas le temps, un cabinet de statistique, qui doit être constitué de personnes ayant cette « éducation spéciale » et devant de plus observer une certaine neutralité politique, est nécessaire. Signalons ici, comme cela est analysé dans [Mazliak, 2010], que la SSP a été dirigée par trois fois par des mathématiciens entre 1920 et 1950, notamment par Borel en 1922 (par la suite ce furent Georges Darmois en 1938 et Fréchet en 1948). Borel devient député en 1924 et est brièvement ministre de la marine en 1925. Ce poids politique et institutionnel est mis au service de ses convictions. Ainsi, à partir de 1921, il se lance dans un projet éditorial de grande envergure, à savoir la publication du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, dont le but est de rassembler l'ensemble de la connaissance en probabilité en un seul traité. Ce projet court sur 18 ans (le dernier fascicule, *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, est publié en 1939) et fait appel à de nombreux auteurs : Borel emploie quasi exclusivement des normaliens, dont la liberté éditoriale est d'autant plus grande qu'ils sont issus de promotions anciennes. Ainsi, alors que Fréchet (qui n'a que 7 ans de moins que Borel) impose ses vues, les auteurs les plus jeunes se contentent de récolter la parole du maître. Le *Traité* est un succès en ce qu'il a réussi à intéresser la communauté mathématicienne au calcul des probabilités et a introduit les mathématiques de l'aléatoire dans le champ scientifique. Mais c'est aussi un échec, car le *Traité* n'a pas une unité aussi réelle que Borel l'aurait souhaité [25], mais surtout puisque, à cause de l'évolution rapide du calcul des probabilités entre 1921 et 1938, il est obsolète dès sa sortie [26]. En parallèle, en 1922 est fondé, à l'initiative de Borel, March, et Faure [27], l'Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP) dont le but est d'enseigner

24. [Borel, 1920, p. 12].
25. Une illustration est la difficulté du rangement des fascicules du *Traité* dans les bibliothèques : étant rangés soit par auteur, soit par thème, ils n'étaient jamais d'un seul tenant dans les rayons.
26. Cf. [Bustamante *et al.*, 2015], qui détaille le projet de Borel et sa réalisation.
27. Fernand Faure (1853–1929) est un homme politique et professeur de droit. Député (entre 1885 et 1889)

≪ la méthode statistique et ses applications ≫[28]. Enfin, en 1928, grâce aux fonds de la fondation Rockefeller, Borel crée l'Institut Henri Poincaré (IHP) dédié à la recherche en physique mathématique et en probabilité. Alors que la fondation Rockefeller voulait surtout financer un institut dédié à la physique mathématique, c'est grâce à Borel que le calcul des probabilités est ajouté aux champs de recherche de l'institut.

Au niveau institutionnel, le premier lieu d'enseignement entièrement dédié à la statistique en France est l'ISUP. Le cursus, qui s'étend sur deux ans, mêle à la fois des aspects théoriques (notamment à travers un cours de statistique mathématique) et pratiques : démographie, biométrie, hygiène publique, assurance, industries, finances publiques, etc. Le premier véritable manuel de statistique s'appuyant sur le calcul des probabilités, intitulé *Statistique mathématique*, est écrit par Darmois et est publié en 1928 sur la base du cours *Méthode statistique – Éléments de statistique mathématique* qu'il donne à l'ISUP à partir de 1924. Même si la plupart des cours sont tournés vers les applications et sont assurés par des professeurs non issus des milieux universitaires, ce qui se ressent puisque la majorité des mémoires soutenus par les étudiants ne concernent pas la statistique mathématique, le cours de Darmois a lieu en première année et est obligatoire, ce qui signifie que tous les élèves y sont, pour ainsi dire, exposés. Mais il ne faudrait pas non plus surestimer l'importance de l'enseignement dispensé à l'ISUP, les effectifs restent faibles. Entre 1925 (la première année où des diplômes sont délivrés) et 1939, ce sont seulement 100 élèves qui reçoivent un diplôme de l'institut. Et parmi ces derniers, 32 sont des élèves français, les autres venant de l'étranger. À titre d'exemple, la première thèse de l'ISUP est soutenue en 1926 par un roumain, Şerban Gheorghiu, et porte sur les finances de la Roumanie d'après-guerre. Si cet enseignement attire si peu d'élèves, ce n'est pas à cause de la qualité des cours, mais à cause des perspectives d'avenir offertes par de telles études. En effet, le diplôme de l'ISUP n'est pas intégré dans le cursus universitaire et l'enseignement dispensé se veut généraliste et ne prépare pas aux carrières administratives, c'est pourquoi ce sont en majorité des étrangers qui suivent les cours de l'ISUP.

Dans l'enseignement supérieur, du changement se fait percevoir. Le cours de statistique appliquée d'Albert Aftalion[29] à la faculté de droit de Paris remporte un franc succès, étant suivi par plus d'une soixantaine d'étudiants. [Morrisson, 1987] signale que ce cours est notamment obligatoire pour les élèves effectuant un doctorat de sciences économiques, et facultatif pour ceux réalisant un doctorat d'économie politique. Néanmoins, de tels enseignements n'ont lieu qu'à Paris, et il n'y a aucun enseignement de niveau licence entièrement dédié aux sciences économiques et sociales. Quant aux facultés de sciences, elles se concentrent sur les mathématiques pures et ne proposent pas d'enseignement de statistique mathématique. En

puis sénateur (de 1924 à sa mort) de la Gironde, il enseigne à la faculté de droit de Bordeaux puis la statistique à Paris à partir de 1892. Pendant la Première Guerre mondiale, il dirige le secrétariat du Comité économique. Cf. [Dic, 1968, tome V, p. 1661].

28. [Pressat, 1987, p. 22].

29. Albert Aftalion (1874–1956), est un économiste d'origine Bulgare qui arriva en France très jeune. Possédant à la fois un doctorat en droit et en économie, il est surtout connu pour ses travaux sur les cycles économiques.

conséquence, les jeunes gens effectuant des thèses en économie, issus des facultés de droit, ne découvrent la statistique que tardivement, et par conséquent ne possèdent, pour reprendre les mots d'Henri Bunle, qu'un « vernis insuffisant de la science statistique »[30]. L'explication de ce manque d'intérêt pour les statistiques, déjà identifiée par le passé, reste la même : les administrations ne valorisent toujours pas les compétences statistiques et préfèrent recruter des juristes.

Quant à l'École polytechnique, Paul Lévy reprend en 1919 l'enseignement du calcul des probabilités. Né en 1886, Paul Lévy était lui-même élève de l'École polytechnique. Il soutient une thèse en analyse fonctionnelle sur des thèmes suggérés par Hadamard. Après la Première Guerre mondiale, le calcul des probabilités reprend droit de cité à l'École polytechnique puisqu'il fait partie du cours d'analyse et n'est plus un simple préliminaire à la théorie des erreurs. C'est donc par la voie de l'enseignement que Lévy découvre ce champ des mathématiques auquel il contribue grandement[31]. Il y produit des développements riches, empreints d'une vision géométrique très personnelle, héritée de l'enseignement pluridisciplinaire de l'École polytechnique, notamment à propos des lois stables et du mouvement brownien[32]. Toutefois, il semble qu'il ait été un professeur « sinon incompréhensible, du moins incompris »[33]. Ce n'est qu'en 1958, avec l'arrivée de Laurent Schwartz, que le calcul des probabilités est réellement valorisé au même titre que le reste des mathématiques auprès des élèves de l'École polytechnique.

En somme, jusqu'en 1939, les maux qui expliquent le retard français (comparativement aux pays anglo-saxons ou à l'Allemagne) dans l'enseignement des statistiques, notamment le problème des débouchés, sont bien connus[34], mais la rigidité des structures administratives et universitaires en place fait que rien ne change avant la Première Guerre mondiale, et que la situation ne s'améliore qu'un peu dans l'entre-deux-guerres.

La publication du *Calcul des probabilités à la portée de tous*, en 1924, se situe donc à un

30. Ces propos sont rapportés dans [Morrisson, 1987, p. 818].

31. Un autre élément clé de ce tourant probabiliste est que Lévy a prolongé les travaux en analyse fonctionnelle de René Gateaux (1889–1914), un de ces jeunes normaliens tués pendant la Première Guerre mondiale qui a à peine eu le temps d'entamer des recherches en mathématiques. Lévy a eu à cœur de poursuivre les travaux de Gateaux, et leur a donné une interprétation probabiliste. On pourra lire [Mazliak, 2015] pour plus de détails.

32. Il entame à partir de 1918 une correspondance avec Fréchet, notamment à propos des question liées au calcul des probabilités, qui a été étudiée et publiée dans [Barbut *et al.*, 2004].

33. Cette formule provient de [Meusnier, 2006, p. 11].

34. Et le diagnostic est le bon. Le Service National des Statistiques (SNS) est fondé en 1942 et il devient par la suite l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques (INSEE) en 1946. Ce service est bien plus important que la SGF (qui ne compte que quelque dizaines de personnes au début du 20e siècle) puisqu'il emploie par exemple 7000 personnes en 1945. Grâce à cette arrivée massive de débouchés pour les statisticiens, l'enseignement de la statistique a pu réellement prendre son envol. Ainsi, au début, l'école d'application de l'INSEE (qui devient l'ENSAE en 1960) partage une partie de ses cours avec l'ISUP, les élèves de l'INSEE recevant en plus un véritable enseignement d'économie, puis elle s'en détache notamment à cause de la taille importante de ses promotions. En 1952 se crée grâce à l'initiative de Darmois le Centre de formation aux applications industrielles de la statistique, qui reçoit énormément de stagiaires venant du personnel des entreprises. Dans l'université, la mise en place d'un réel enseignement de la statistique est plus tardive, elle n'a lieu qu'en 1960 avec la création de licences de sciences économiques. Néanmoins les cours à l'université restent théoriques, le principal écueil étant qu'aucun professeur n'a une double formation en mathématique et en économie.

moment très particulier : en France, la statistique est en train de changer de statut et le calcul des probabilités s'impose comme son fondement. Le traité de Fréchet et Halbwachs renvoie donc à une période où les positions sont en train de se sédimenter, et il fournit l'opportunité de voir cette sédimentation en action puisque, pour reprendre le mot d'Armatte,

> Le traité marque une position intermédiaire entre une science « chaude » en train de se faire au travers de ses controverses et une science « froide » opératoire et reconstruite comme une machine automatique. [35]

Mais pour étudier en détail cette sédimentation en action, il est nécessaire d'analyser plus finement le lieu de l'écriture de ce traité ainsi que ses auteurs.

1.2 Strasbourg au sortir de la Première Guerre mondiale

Le calcul des probabilités à la portée de tous a été écrit à partir d'enseignements dispensés à la faculté de Strasbourg. Nous allons voir dans ce qui suit en quoi cette faculté a dans les années 1920 une position tout à fait singulière par rapport au reste du paysage académique français.

1.2.1 Une vitrine de la science française

Lorsque l'Alsace-Moselle est perdue par la France en 1870, l'université de Strasbourg passe sous contrôle allemand et se transforme en vitrine de la science allemande. Cete évolution ne doit rien au hasard et est la conséquence d'une volonté politique. La position de la ville, à la frontière occidentale de l'empire, en fait naturellement un poste avancé de la culture allemande. Elle devient notamment un important centre de statistique. D'un point de vue administratif, on assiste à la création d'un office de statistique dans la ville de Strasbourg. La période coïncide avec la mise en place d'un état allemand et la centralisation administrative des services de statistique sous la direction d'Ernest Engel (1821-1896), directeur du Bureau prussien de statistique entre 1860 et 1882 [36]. D'un point de vue académique, l'université voit enseigner dans ses murs des professeurs comme le statisticien Wilhelm Lexis (entre 1872 et 1874), le statisticien et économiste Georg F. Knapp (à partir de 1874 et jusqu'en 1918) ainsi que l'hydrodynamicien et futur probabiliste Richard von Mises (entre 1909 et 1918). Autant les travaux de von Mises sur les probabilités et leurs fondements sont postérieurs à sa période strasbourgeoise et sa présence dans cette énumération est quelque peu superflue, autant celle de Lexis mérite un commentaire. Lexis (1837–1914), en plus de ses travaux en économie, s'est intéressé aux statistiques sur les populations et l'espérance de vie [37]. Convaincu de l'existence de lois de la nature pour la mortalité, à l'aide d'une analyse de séries statistiques, il distingue trois catégories de décès : les enfants morts en bas âge ; les individus ayant succombé à une mort prématurée ; et ceux ayant

35. [Armatte, 1991, p. 164]
36. Pour plus de détails sur ce personnage, voir [Desrosières, 1993, chap. 6].
37. Cet aspect de ses travaux est discuté dans [Véron et Rohrbasser, 2003].

eu une mort normale. L'hypothèse est faite que les décès du dernier groupe se répartissent selon la loi des erreurs autour d'une valeur typique. Mais la loi des erreurs sous-estime le nombre de décès des plus jeunes, les décès ne pouvant pas être attribués à ceux prédits par la loi normale sont caractérisés comme prématurés. La répartition des décès est alors décrite par trois paramètres : l'âge normal du décès (environ 70 ans), l'erreur probable sur l'âge du décès (environ 6 ans), et la proportion de décès normaux (environ 40 %). Avec cette catégorisation des décès, Lexis marche dans les pas de Quetelet en réifiant les indicateurs statistiques comme la moyenne et en considérant la loi des erreurs comme le signe d'une régularité naturelle. Mais Lexis est aussi connu pour avoir créé l'outil qui détruisit les théories de Quetelet « de l'intérieur », à savoir le coefficient de divergence (de Lexis). Ce dernier mesure le rapport entre l'écart probable empiriquement mesuré et l'écart probable théorique calculé comme si la série était obtenue à partir de tirages de boules dans une urne. Si ce rapport est proche de 1, il est raisonnable de penser que la série pourrait être obtenue à partir de tirages de boules dans une urne, dans le cas contraire cette hypothèse est à remettre en question [38]. Or, le calcul de ce coefficient sur des séries comme le nombre de décès, de suicides, ou encore de mariages, rend une conclusion sans appel : ces séries ne peuvent être obtenues à partir du modèle de l'urne, contrairement à ce que prétendait Quetelet. Après avoir quitté Strasbourg, Lexis fût notamment professeur à Göttingen à partir de 1887, il y rencontra d'ailleurs Halbwachs lorsque ce dernier effectua son voyage d'étude en Allemagne. Cet épisode sera discuté dans la section 1.4.1, revenons pour le moment à l'histoire de l'université de Strasbourg.

Après la capitulation allemande de 1918 et la récupération de l'Alsace-Moselle, le but est de refranciser les territoires occupés par l'Allemagne pendant trop longtemps. L'université de Strasbourg ne fait pas exception et l'objectif est clairement d'en faire une vitrine de la science française. L'état d'esprit est de montrer que dans cette université reconquise, l'enseignement et la recherche seront de meilleure qualité que ce qui se faisait auparavant, alors que les Allemands prétendent évidemment le contraire et prédisent le déclin de ce lieu qu'ils abandonnent. À titre d'exemple, la lettre que le député Manoury écrit en 1919 au représentant du gouvernement français illustre sans ambiguïtés les ambitions de la France au sujet de Strasbourg :

> Vous savez mieux que personne l'importance considérable que les allemands avaient donnée à cette université et la coquetterie qu'ils ont mise à en faire une des plus brillantes sinon la plus brillante de l'empire. Vous avez certainement vu aussi qu'ils ont prédit en partant qu'en moins de 3 ans la France aurait saboté leur œuvre. Comment relever ce défi ? [39]

En conséquence, l'université reçoit de nombreux moyens à la fois financiers et humains. Pour trouver des professeurs, on fait notamment venir des français en mission (la venue de Fréchet et Halbwachs s'inscrit dans cette logique). Strasbourg devient, dans la décennie qui suit, le deuxième centre universitaire de France après Paris, et les logiques universitaires classiques sont bousculées. Les professeurs sont pour la plupart jeunes, plusieurs viennent d'être démobilisés

38. Pour les détails mathématiques, on peut se reporter à la section 2.1.7.
39. Lettre de Manoury à Millerand du 5 avril 1919 citée dans [Catellier et Mazliak, 2012, p. 298].

et occupent à Strasbourg leur premier poste [40]. Beaucoup viennent avec une âme de missionnaire et ils ont la volonté de relever le défi de la reconquête de l'université et d'expérimenter de nouvelles manières d'enseigner. Ainsi il n'est pas rare qu'ils assistent aux cours de leurs collègues (chose difficilement acceptable dans la tradition institutionnelle française), les initiatives interdisciplinaires sont favorisées, la place accordée à la recherche est plus importante. Les professeurs ont le sentiment d'appartenir à une équipe. Comparativement aux autres universités, moins de moyens sont consacrés à la préparation à l'agrégation, « cette mangeuse de forces intellectuelles » [41]. L'université de Strasourg est le lieu d'épanouissement de ce que Henri Berr appelle « l'esprit de synthèse », où, au delà de la spécialisation de chacun, une certaine unité de la connaissance est assurée : « l'enseignement supérieur doit être, comme l'esprit, multiple et un » [42]. Ce projet de réappropriation ne se fait néanmoins pas sans heurts. Certaines difficultés inattendues, ou du moins peu anticipées par les français qui pensaient arriver en terrain conquis, surgissent. Notamment la différence d'organisation des systèmes scolaires ou encore le fait, les premières années, que les étudiants ne parlent pas français. Après une brève période où l'on cherche à imposer le modèle français, les professeurs envoyés sur place comprennent qu'il leur faut faire quelques compromis et qu'ils doivent s'adapter.

En parallèle, les français s'occupent de récupérer le savoir-faire allemand. C'est un véritable transfert de compétence auquel on assiste. Ainsi le statisticien Henri Bunle [43] est envoyé à Strasbourg pour récupérer le savoir-faire de l'Office de statistique d'Alsace-Moselle, il s'en acquitte en faisant travailler les employés (allemands) de cet office avec des « Alsaciens-Lorrains de bonne souche » pour reprendre l'expression de Bunle [44].

L'université tente aussi de rayonner à l'international. C'est pendant cette période que Fréchet se construit un réseau en vue de cette tâche, réseau qu'il a eu l'occasion d'utiliser par la suite. Ce sont en particulier les relations avec les nouveaux pays créés sur les ruines de l'empire austro-hongrois que l'on espère développer : il est proposé aux étudiants de ces pays de venir à Strasbourg, dans un environnement qui reste influencé par le système scolaire allemand, tout en profitant de la présence de certains des meilleurs professeurs de l'université française. Sans compter la proximité géographique puisque, pour reprendre le mot de Fréchet, « on va plus vite de Strasbourg à Prague qu'à Marseille » [45]. Néanmoins ce projet n'a pas rencontré le succès dans les dimensions escomptées, notamment car certains pays, tels la Tchécoslovaquie, préfèrent souvent développer leur propre enseignement supérieur plutôt que de laisser partir leurs étudiants à l'étranger. De plus, et c'est le même problème lorsqu'il s'agit de faire venir des

40. À titre d'exemple, on peut citer Marc Bloch, Edmond Vermeil ou encore Maurice Fréchet, même si ce dernier avait déjà enseigné à la faculté avant la guerre.

41. [Berr, 1921, p. 8].

42. [Berr, 1921, p. 4].

43. Henri Bunle (1884-1986), qui a effectué sa carrière à la SGF, a été un des derniers témoins vivants (il a vécu jusqu'à 102 ans) des transformations de la statistique française du début du 20e siècle.

44. Cette histoire est racontée dans un entretien accordé par Bunle à Desrosières en 1982 et dont des extraits sont retranscrits dans [Bunle, 2005].

45. Cité dans [Havlova *et al.*, 2005, p. 9].

professeurs et des étudiants du monde anglo-saxon, la France reste avare et n'a pas les moyens financiers de ses ambitions. Le sixième Congrès international des mathématiciens est l'exemple d'une réussite mitigée de la politique de rayonnement de l'université. Premier congrès depuis celui de Cambridge en 1912, il se réunit à Strasbourg, alors qu'il était initialement prévu en Suède (en plus des protestations des Suédois et des autres pays neutres, on trouve celles des Allemands et de leurs alliés qui en sont exclus). Cette décision a pour but de propulser Strasbourg sur la scène internationale. Mais l'Institut de mathématiques de Strasbourg n'est pas l'acteur principal de la préparation du congrès, bien que Fréchet profita de cet événement pour étendre son réseau.

1.2.2 L'Institut d'enseignement commercial supérieur de Strasbourg

L'Institut d'Enseignement Commercial Supérieur de Strasbourg (IECS) [46] est créé en 1919 sous l'impulsion de la chambre de commerce et d'industrie, à l'aide de fonds publics (chambre de commerce, ville, conseil général) et de donateurs privés. Les discussions préalables à sa création ont lieu dès l'année 1918, avant même la fin de la guerre. Le but est de former les cadres commerciaux de l'Alsace-Moselle à la situation nouvelle qui va s'imposer. En effet, la langue officielle ainsi que les lois changent, et l'économie alsacienne, qui dépendait fortement du commerce avec le reste de l'Allemagne, doit maintenant être tournée vers la France. L'enseignement dure quatre années (deux d'enseignement général et deux d'enseignement spécialisé) et commence après le baccalauréat. La première promotion en 1920 compte une quarantaine de personnes et est constituée majoritairement de filles et fils de notables alsaciens.

L'enseignement a lieu dans un premier temps dans les locaux de l'université de Strasbourg. Il est dispensé par les professeurs de l'université. Fréchet, alors directeur de l'Institut de mathématiques, s'occupe du cours de mathématique appliquée en seconde année (notamment en vue de la théorie des assurances), tandis que Halbwachs professe le cours de statistique. À cette occasion, ils entament la collaboration qui déboucha sur la publication du *Calcul des probabilités à la portée de tous*. Comme expliqué dans la préface, le livre est tiré de l'enseignement de Fréchet, mais « rédigé, remanié, mis au point » [47] en collaboration avec Halbwachs.

1.3 Maurice Fréchet, mathématicien brillant et engagé

1.3.1 Repères biographiques

René Maurice Fréchet naît le 2 septembre 1878 dans l'Yonne. Quatrième d'une famille de six enfants, il choisit comme ses trois frères une carrière d'enseignant et réussit le concours de l'ÉNS en 1900. Auparavant, il fût l'élève de Jacques Hadamard au lycée Buffon, et ce dernier

46. L'IECS existe d'ailleurs toujours aujourd'hui sous le nom de *EM Strasbourg Business School* et est rattaché à l'université de Strasbourg III.
47. [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. VII].

joua toujours pour lui le rôle de mentor. Il passe l'agrégation de mathématiques en 1903 puis commence une thèse sur le « calcul fonctionnel » où il prend pour point de départ des travaux de Vito Volterra [48]. Cette thèse, qu'il soutient en 1906, voit Fréchet introduire des notions topologiques fondamentales telles les concepts d'espace métrique et de compacité. Mais, bien que sa thèse représente un pas marqué vers l'abstraction, Fréchet ne le fait pas gratuitement et cherche simplement la voie la plus économe pour saisir la structure mathématique commune qui apparaît au travers des problèmes particuliers posés par Volterra. Plutôt que d'écrire une série de démonstrations similaires, il comprend qu'il est plus rapide d'introduire un concept abstrait mais fécond qui puisse englober cette série de démonstrations [49]. Il propose même en 1915 une définition de l'intégrale dans les espaces abstraits. Ses travaux furent par la suite prolongés par Norbert Wiener ainsi que l'école de topologie polonaise (Banach, Sierpinski, etc.). Après sa thèse, il commence la carrière académique à laquelle il se destinait, d'abord en classe préparatoire à Besançon, puis Nantes, et par la suite à la faculté des sciences de Rennes puis de Poitiers.

Il est mobilisé lorsque la guerre éclate en 1914, et il passe la majeure partie de celle-ci en tant qu'interprète auprès du haut-commandement britannique. En effet, Fréchet est un polyglotte : il parle couramment l'anglais ce qui explique son rôle pendant la guerre ; mais c'est aussi le cas pour l'allemand, ce qui n'est pas sans rapport avec la mission strasbourgeoise qu'on lui confie en 1919. C'est un militant actif pour l'espéranto, il publia de nombreux articles mathématiques dans cette langue et fût même président de l'Association scientifique internationale d'espéranto (*Internacia Scienca Asocio Esperantista*) entre 1950 et 1953.

Envoyé à Strasbourg en 1919, Fréchet comprend très bien l'épreuve de « confrontation » avec la science allemande qu'il doit remporter. Comme mentionné plus haut, c'est à ce moment que Fréchet constitue son réseau et joue de ses relations pour faire exister l'université de Strasbourg sur la scène internationale. Il n'entre pas en opposition brutale avec le modèle universitaire allemand, reconnaissant certains avantages de celui-ci pour ce qui relève de la recherche, mais pas en ce qui concerne l'enseignement. Pour Fréchet, l'enseignement allemand, qui passe par un contact permanent des étudiants avec la recherche, ne leur permet pas d'acquérir un véritable recul sur leurs connaissances, et s'il les rend très au fait de certains développements modernes, il les laisse sans vue d'ensemble sur leur savoir. Il est donc indispensable de rétablir à l'université de Strasbourg le cours magistral à la française. Pour donner un idée de l'état d'esprit de Fréchet, citons ici quelques passages d'un discours prononcé lors de l'inauguration de l'université de Strasbourg en novembre 1919 et dont des extraits sont publiés dans la *Revue du mois* de Borel en 1920. Dans ce discours, Fréchet fait preuve d'un courage certain en reconnaissant si peu de temps après la fin du conflit certains mérites de la science allemande. Les extraits qui suivent concernent la partie où Fréchet se donne pour objectif de faire la biographie du

48. À propos de l'influence que Volterra a eu sur Fréchet, on peut consulter [Guerraggio *et al.*, 2016].

49. Angus E. Taylor a produit dans les années 80 une série de trois longs articles, ([Taylor, 1982], [Taylor, 1985] et [Taylor, 1987]) qui présente les contributions de Fréchet en analyse et en topologie. Le premier article détaille en particulier le contenu de la thèse de Fréchet.

mathématicien d'origine alsacienne Louis-François-Antoine Arbogast (1759-1803). Mais l'aspect historique n'est qu'un arrière plan mis au service d'un but politique, ce qui rend la lecture de ce discours assez savoureuse. Ce but peut se percevoir par exemple dans le passage suivant :

> Et on voit se refléter chez [Arbogast] cette éducation si particulière des Alsaciens qui, avec une connaissance complète des choses de l'Allemagne, leur donnait le désir d'en faire bénéficier la France toute entière. [50]

Il faut bien sûr lire en filigrane le projet que le France entend mener à Strasbourg. Cette ville est dans une position toute particulière, puisque située à la frontière avec l'Allemagne, et cette situation doit être exploitée afin « d'en faire bénéficier la France toute entière ». Le dynamisme qui règne à Strasbourg, les connaissances apprises pendant la période allemande, doivent être exportées dans le reste de la France. Arbogast sert aussi de justification pour des affirmations plus nationalistes, comme celle sur la supériorité de la langue française sur la langue allemande :

> Cette connaissance de la langue allemande et des publications allemandes donne d'autant plus de poids aux appréciations suivantes qu'on peut lire dans un rapport très intéressant qu'[Arbogast] présente à la Convention nationale au nom du Comité d'instruction publique, sur la composition des livres élémentaires : « La langue française, qui, de toutes les langues usitées, aujourd'hui est la plus propre *aux sciences*, parce qu'elle est la plus précise et la plus élégante... » Messieurs, retenez ce jugement d'un grand Alsacien à qui l'allemand était aussi familier que le français. [51]

Ces courts extraits montrent l'attitude de Fréchet, pleinement conscient du rôle politique qu'il est appelé à jouer et en même temps prêt à s'adapter aux particularités locales.

C'est pendant cette période strabourgeoise (qui prend fin en 1928 quand Borel le rappelle à Paris pour l'IHP qui vient d'ouvrir) que Fréchet découvre le calcul des probabilités et la statistique. Le premier est un objet de recherche qu'on voit émerger dans la correspondance entretenue à partir de 1919 avec le mathématicien tchèque Hostinský [52], tandis que le contact avec la seconde provient de ses obligations d'enseignement. La venue de Fréchet vers le calcul des probabilités n'est donc pas de la même nature que celle de ses aînés. Poincaré s'y intéressa que parce que son utilisation était apparue incontournable en physique, et il s'est employé à délimiter une zone dans laquelle l'usage du calcul des probabilités est licite et assuré sur des bases solides. Quant à Borel, c'est à l'origine sur des problèmes de mathématiques pures que son intérêt s'est cristallisé, même s'il s'est vite rendu compte qu'il est bénéfique d'étendre l'usage du calcul des probabilités à d'autres disciplines (économie, psychologie) et à la vie courante. Mais Fréchet a directement découvert le calcul des probabilités à travers ses applications aux sciences humaines sans passer par son utilisation en physique ou en mathématique. Par la suite, Fréchet publia en 1936 et 1938 deux fascicules sur le calcul des probabilité dans le *Traité* de Borel évoqué plus haut. Le terme de « fascicule » est d'ailleurs assez peu adapté

50. [Fréchet, 1955a, p. 370].
51. [Fréchet, 1955a, p. 370].
52. Cf. [Havlova *et al.*, 2005] pour plus de détails.

puisqu'il s'agit d'une véritable monographie présentant des sujets actuels du calcul des probabilités, indépendante du reste du *Traité* [53] : les développements les plus récents, comme les chaînes de Markov, y forment une thématique centrale. Par ailleurs, Fréchet joua un rôle influent dans les instances statistiques internationales. Ainsi en 1934 il engage au congrès de l'Institut International de Statistique (IIS) une controverse au sujet de l'usage du coefficient de corrélation en soulignant son caractère arbitraire et son inadéquation dans certaines situations où il est utilisé [54]. Il se montre alors redoutable « homme de réseau » et mène une véritable campagne contre l'usage de ce coefficient : il fait monter une commission, conduit une enquête auprès de statisticiens prestigieux, publie plusieurs articles assassins dans la *Revue* et le *Bulletin* de l'IIS. À la fin de sa carrière (en 1948, c'est-à-dire à l'âge de 70 ans), il devint le troisième mathématicien à prendre la présidence de la SSP (après Borel en 1922 et Darmois en 1938), soulignant la place croissante des mathématiques dans les travaux statistiques en France. Il meurt en 1973 à l'âge de 94 ans.

1.3.2 Enseignement du calcul des probabilités et de la statistique chez Fréchet

Le livre coécrit par Fréchet et Halbwachs veut montrer en quoi des connaissances élémentaires en algèbre permettent d'obtenir la plupart des résultats les plus utiles du calcul des probabilités et de saisir le sens des méthodes statistiques. Dans ce qui suit, nous allons donc analyser la façon dont Fréchet conçoit l'enseignement des mathématiques ainsi que le lien qu'il tisse entre le calcul des probabilités et la statistique.

Pour Fréchet, l'enseignement des mathématiques doit s'ancrer dans l'expérience concrète. De la part de quelqu'un dont les travaux de recherche, notamment en thèse, ont mené à la définition axiomatique et novatrice de concepts topologiques, ce desiderata peut surprendre. Mais cela donne justement plus de force à son affirmation. Pour lui, si la science a pour méthode de déduire l'ensemble de ses résultats à partir d'un petit nombre de principes (c'est la méthode axiomatique), il n'en reste pas moins qu'il faut vérifier à un moment ou à un autre la concordance entre les principes logiques et l'expérience concrète. Un des exemples qu'il donne dans un texte intitulé *Sur une désaxiomatisation de la science*, tiré d'une conférence faite à Berne en 1925, est celui de la circonférence. Au départ, la longueur d'une circonférence [55] était définie concrètement par la longueur d'une corde enroulée autour de la courbe. Elle l'est maintenant comme la limite de la longueur d'une suite de lignes polygonales qui converge vers la courbe. La notion de longueur d'une circonférence est réduite à celle de la longueur d'une ligne polygonale, donc d'un segment : il y a bien réduction d'un notion complexe à un principe plus simple.

53. Comme cela a déjà été signalé plus haut, au contraire des auteurs les plus jeunes du *Traité*, Fréchet a carte blanche pour l'organisation de ses fascicules et il en profite donc pour développer un projet ambitieux.

54. Cet épisode est exposé dans [Armatte, 2001].

55. Le terme peut surprendre, mais c'est bien celui qu'emploie Fréchet. Le lecteur moderne est donc prié de lire « ligne courbe » au lieu de « circonférence ».

Mais il faut à la fois vérifier que la définition moderne a un sens (que la limite est bien définie par exemple) et qu'elle coïncide en pratique avec l'ancienne définition. Et cette coïncidence ne peut que s'ancrer dans l'expérience concrète, elle ne peut venir de réflexion *a priori*. Il est donc impossible d'exposer de manière purement axiomatique et déductive une théorie mathématique qui doit s'appliquer au concret.

> A une définition imposée par l'expérience, on substitue une définition logique qui est une combinaison de notions fondamentales. Précisément parce que, dans cet exemple [de la longueur d'une circonférence], la définition de cette longueur est une combinaison logique de notions antérieures, elle permet d'obtenir la valeur de ce nombre par des combinaisons mathématiques, c'est-à-dire logiques. Mais prenons garde à ceci ; rien ne nous garantit que ce nombre-ci, défini logiquement, soit le même que le nombre qui convient à la définition physique originale. La concordance entre les nombres à obtenir est vraisemblable. C'est précisément parce qu'elle paraissait vraisemblable que les géomètres ont été conduits à leur définition abstraite. Mais quelle était l'origine de ces vraisemblances ? C'est une série d'observations expérimentales emmagasinées inconsciemment dans l'esprit. [56]

Or, si Fréchet ne doute pas que le praticien aguerri sache de quelle expérience concrète la concordance des définitions découle, il n'en est pas de même pour l'élève s'il reçoit un enseignement axiomatique. C'est pourquoi il est nécessaire de « désaxiomatiser » l'enseignement des mathématiques et de faire suivre toute définition abstraite d'une mise en application concrète de celle-ci. Si ce n'est pas le cas, peut-être que les élèves les plus brillants verront qu'il faut transformer une définition pour l'utiliser dans la pratique. Mais les autres, qui sont souvent majoritaires, utiliseront sans le questionner le lien entre la définition pratique et la définition théorique, et ainsi un élève « s'habituera à considérer comme évidente une assertion qui ne l'est, ni dans la théorie, ni dans la pratique » [57].

Avec cette critique Fréchet marche dans les pas de son aîné Borel. Ce dernier, après avoir cédé aux sirènes du logicisme cantorien dans sa jeunesse, s'est forgé la conviction que les mathématiques doivent rester au contact du réel et que toute manipulation mathématique abstraite n'a pas forcément une portée concrète. Un axiome *a priori* n'a pas forcément de valeur pratique : la perfection logique ne suffit pas pour pour qu'il y ait accord avec la réalité. Le mathématicien a le devoir de vérifier sans cesse le domaine d'applicabilité de ses résultats, sous peine de tomber dans des spéculations vides de sens pratique. Ses ouvrages réflexifs sur la probabilité (comme *Le Hasard* ou *Valeur pratique et philosophie des probabilités*) consacrent de longs passages à la valeur du calcul des probabilités, qu'elle soit pratique, physique ou philosophique. Ainsi, en 1924, à l'occasion d'une recension du traité de Keynes sur les probabilités, Borel se fend d'une critique acide [58] puisque ce traité ne mentionne pas du tout d'application

56. [Fréchet, 1955b, p. 4].
57. [Fréchet, 1955b, p. 7].
58. Keynes avait lui publié deux recensions assez négatives des *Éléments de probabilités* (1909) de Borel. La recension de 1924 de ce dernier peut donc s'interpréter comme une réponse (à retardement, il va sans dire). Pour plus de détails on pourra consulter [Mazliak et Sage, 2014, p. 353-356].

à la physique statistique. Il est impensable pour Borel de fournir une théorie des probabilités qui ne saisisse pas leur application à la physique et ne se justifie que par sa cohérence logique interne. De même, dans *Le Hasard*, Borel avait critiqué Poincaré qui ≪ préfère toujours une certitude abstraite à une certitude concrète ≫ et qui ne témoigne l'excès de ses exigences quant au degré supérieur de certitude à atteindre que ≪ pour se donner la joie intellectuelle de les satisfaire ≫ [59]. Cette critique était formulée à l'occasion de la présentation de la méthode des fonctions arbitraires : pour Poincaré cette méthode devait permettre de s'assurer qu'il y a bien lieu d'attribuer des valeurs aux probabilités même dans le cas continu sans avoir à se référer au principe de raison suffisante [60]. Mais Borel signalait douter que l'on puisse avoir une telle assurance simplement à partir de considérations mathématiques *a priori* comme le fait Poincaré.

Fréchet en tire alors des impératifs pour son enseignement du calcul des probabilités, surtout à destination de ceux qui ne sont pas mathématiciens. Il faut éviter de le présenter comme une déduction formelle à partir d'un petit nombre d'axiomes. Au contraire, il faut dès le début montrer le lien avec les notions expérimentales. Cette exigence se retrouve dans le livre de 1924 qui fourmille d'exemples et où, pour de nombreuses notions, c'est d'abord un exemple qui est analysé, avant qu'un concept plus général ne soit induit. Nous ne résistons pas ici à présenter un autre extrait de sa biographie du mathématicien Arbogast, où ce dernier est convoqué non pas pour flatter le nationalisme français, mais pour affirmer ce qu'est la ≪ bonne ≫ méthode d'enseignement.

> Ce qu'[Arbogast] désire surtout, c'est proscrire cette méthode qui présente la science comme une sorte de révélation divine, au moyen d'une suite de lemmes, de théorèmes, de corollaires, chacun parfaitement démontré, mais dont la suite se déroule selon une loi mystérieuse et inaccessible. Si, au contraire, on expose en peu de mots comment un problème s'est posé, quelle était la difficulté principale à vaincre, comment on serre cette difficulté par une sorte de suite d'approximations successives, non seulement l'élève n'est pas rebuté par un aspect énigmatique donné à la science, mais s'il a oublié tel ou tel chaînon, il se trouve mieux en état de le restituer.
>
> Bien des futurs professeurs auraient intérêt à méditer les conseils d'Arbogast. Combien de fois n'ai-je pas entendu des candidats à l'agrégation exposer telle ou telle théorie de cette façon dogmatique où la logique est satisfaite aux dépens de l'initiative et de l'intelligence ? [61]

C'est donc selon Fréchet contre une tradition millénaire qui remonte à Euclide qu'il va essayer de se battre à travers sa façon d'enseigner, et le *Calcul des probabilités à la portée de tous* est un bon exemple de cette lutte.

Les liens entre le calcul des probabilités et la statistique, on l'a dit, se mettent en place au

59. [Borel, 1914, p. 95].
60. Ce principe énonce que face à des événements pour lesquels nous sommes également incertains, il convient de leur attribuer une probabilité identique. Mais dans le cas continu ce principe mène rapidement à des paradoxes comme celui de Bertrand.
61. [Fréchet, 1955a, p. 383].

début du 20e siècle en France. Fréchet prend position dans ce débat qui n'est pas encore tranché en vue de l'utilisation de la statistique en sciences humaines et non pour la physique. Cet intérêt pour les sciences humaines le suivit d'ailleurs tout au long de sa vie, il s'efforça sans cesse de maintenir le contact entre elles et les mathématiciens, comme en témoignent les nombreuses interventions qu'il a effectuées à destination des spécialistes en sciences humaines.

Pour lui, les mathématiques servent de justification à toutes les méthodes statistiques. Si la statistique a pu auparavant être descriptive et littéraire, elle utilise maintenant le calcul des probabilités de façon prépondérante. Même pour des indicateurs qui semblent purement descriptifs (moyenne, médiane, dominante [62], valeur centrale [63], etc.), c'est le calcul des probabilités qui justifie leur pertinence et qui montre leurs limites et les conventions desquels ils sont issus. Or, le problème pour Fréchet est que les ouvrages de statistique qui sont publiés expliquent comment calculer, souvent de façon très efficace, ces indicateurs descriptifs mais ne montrent pas sur quelles hypothèses ils reposent et en quelle mesure ils sont conventionnels. La méthode statistique devient alors, pour reprendre les mots d'Halbwachs, ≪ une routine pour qui n'est point capable d'en saisir l'esprit et le sens scientifique profond ≫ [64]. Même la nomenclature, fait remarquer Fréchet, n'aide pas à saisir le caractère conventionnel de la méthode statistique et a tendance au contraire à la naturaliser, puisque l'on parle de ≪ loi *normale* ≫ ou de ≪ *standard* deviation ≫, ce qui sous-entend que certains outils sont plus naturels que d'autres. Comme déjà évoqué plus haut, Fréchet n'en est pas resté à des recommandations prononcées dans le vide, il a utilisé son poids institutionnel pour que les statisticiens reconnaissent ce caractère conventionnel. Par exemple, dans sa bataille contre l'usage du coefficient ≪ dit de corrélation ≫ [65], il met en garde que ce coefficient teste la dépendance linéaire et pas la dépendance tout court, et il s'appuie sur le calcul des probabilités pour construire de nouveaux indices de corrélation. À l'opposé, on pourrait croire que la méthode statistique peut se déduire de façon axiomatique du calcul des probabilités. Conformément à ce qui a été écrit plus haut, Fréchet s'inscrit en faux contre cette affirmation et considère que la pratique concrète de la statistique est indispensable pour se construire un jugement à son propos. Cette tension entre la nécessité de connaître à la fois l'origine mathématique de la statistique et d'envisager un lien avec la pratique se lit dans le passage suivant :

> [...] les procédés de la Statistique ont une forme mathématique, mais ils reposent sur des hypothèses ou des conventions simplement plausibles. Il faut connaître les démonstrations de ces procédés pour juger de leur plausibilité et il faut les avoir pratiqués soi-même pour juger de leur efficacité. [66]

Dans *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, un chapitre porte sur la différence entre

62. La valeur dominante d'une série statistique est la valeur la plus fréquente.
63. La valeur centrale d'une série statistique est la moyenne entre le plus grand et le plus petit terme de cette série.
64. [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. VII-VIII].
65. Cette formule qui sous-entend beaucoup se trouve par exemple dans [Fréchet, 1955c, p. 277].
66. [Fréchet, 1955c, p. 280].

moyenne et médiane, et Fréchet insiste sans cesse sur leur caractère conventionnel : en mettant moyenne et médiane sur un pied d'égalité, Fréchet montre qu'il est nécessaire de faire un choix arbitraire pour trancher entre les deux.

Fréchet en tire un conception bien particulière de l'enseignement de la statistique. Pour exposer sa pensée sur ce point précis, nous nous appuyons sur une conférence qu'il a donnée en 1949 ([Fréchet, 1955c]), c'est-à-dire bien longtemps après sa période strasbourgeoise et l'écriture du *Calcul des probabilités à la portée de tous*. Dans cette conférence, Fréchet considère que même les statisticiens appliqués doivent recevoir un enseignement élémentaire de mathématique, ainsi qu'un enseignement de statistique générale, avant de se tourner vers les applications. Car si au contraire le futur statisticien ne suit que des cours donnés par des professeurs ayant appris la statistique « sur le tas » et intéressés uniquement par les applications, il ne verrait la statistique qu'à travers l'exposé de règles de calcul [67]. Le futur statisticien serait alors dans la pire des dispositions puisque la statistique deviendrait pour lui une routine, et il serait bien incapable d'en apercevoir les limites ou les conventions implicites. Quant aux statisticiens « généralistes », ils doivent posséder une solide formation initiale en mathématique, et réaliser un mémoire qui explore un aspect nouveau de la statistique. De plus, afin qu'ils ne soient pas que des automates juste bons à faire les calculs, ces futurs statisticiens généralistes doivent aussi suivre un cours qui leur présente des applications de la statistique. L'ouvrage de 1924 peut alors rétrospectivement être vu comme l'enseignement de mathématique élémentaire que devrait suivre tout statisticien, même appliqué. En effet, dans *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, les auteurs cherchent à montrer qu'avec des connaissances très élémentaires en algèbre, il est possible de déduire de nombreux résultats concernant le calcul des probabilités et de comprendre le sens des méthodes de la statistique.

1.4 Maurice Halbwachs, lecteur de Durkheim et Bergson

1.4.1 Repères biographiques

De même que pour Fréchet, il n'est pas question ici de balayer l'ensemble de la vie et de l'œuvre d'Halbwachs mais de se concentrer sur la période qui permet au mieux d'expliquer la genèse du *Calcul des probabilités à la portée de tous*. Bien que membre éminent de la communauté académique de son temps, Halbwachs a été quelque peu oublié après sa mort, et a été très peu cité par la génération de sociologues arrivée après la Seconde Guerre mondiale. Ce n'est qu'à partir des années 90 qu'il a connu un regain d'intérêt, notamment sous l'impulsion de Marie Jaisson et Éric Brian, et l'on a pu se rendre compte de l'importance et de la profondeur de ses travaux. Les articles [Craig, 1979], [Martin, 1999], [Brian et Jaisson, 2005], [Jaisson et Baudelot, 2007] et [Brian, 2012] nous ont servi ici de matériau de base.

67. Ce risque est bien sûr toujours d'actualité.

Maurice Halbwachs naît le 11 mars 1877 à Reims. Son père est un professeur d'allemand d'origine alsacienne qui a opté pour la nationalité française après la cession de l'Alsace-Moselle à l'Allemagne. Ainsi Halbwachs est germanophone, mais il semble qu'il n'a pas éprouvé d'attachement particulier pour la terre natale de son père [68]. Au lycée Henri IV à Paris, puis après son entrée à l'ÉNS en 1898, il est l'élève de Henri Bergson. Même s'il se détacha progressivement de la pensée bergsonnienne par la suite, il ne le fit pas de gaieté de cœur. Ce n'est que devant l'évidence, quand il devint manifeste que sa pensée était trop éloignée de celle de Bergson, qu'il acte leur désaccord. Il n'a jamais cherché le conflit avec Bergson, et sa réflexion resta profondément influencée par celle de son maître. À l'ÉNS il rencontre un autre élève de Bergson, François Simiand (1873-1935). Ce dernier, excellent philosophe, fût longtemps vu par Bergson comme son héritier présomptif [69], mais Émile Durkheim a réussi à intéresser Simiand à la sociologie, et c'est sur celle-ci que ce dernier jette son dévolu. Il est ainsi considéré comme le fondateur de la sociologie économique. Par l'intermédiaire de Simiand, Halbwachs s'intéresse à son tour à la sociologie (il collabore avec l'*Année sociologique* à partir de 1905), bien qu'il reste encore en ces années là en même temps fidèle à Bergson. On voit ici apparaître l'enjeu qui sous-tend le travail d'Halbwachs par la suite : il veut concilier l'enquête expérimentale chère à Durkheim avec un examen critique et systématique d'inspiration bergsonnienne. Profitons-en pour clarifier un point et éviter toute confusion : les « fondateurs » de la sociologie (Durkheim, Simiand, Halbwachs, etc.) sont des *philosophes* de formation et se sentent donc concernés par des problématiques *philosophiques*. La statistique morale de Quetelet, Lexis, etc. propose déjà une science de la société, mais elle ne repose pas sur une solide théorie de la connaissance, son objet est conceptuellement mal défini. À titre d'exemple, voici la façon dont Halbwachs juge la théorie de Quetelet :

> [...] la théorie de Quetelet, en aucune de ses parties, qu'on l'applique aux faits biologiques, aux faits de population, aux faits moraux, n'est actuellement soutenable, et [...] la sociologie scientifique s'inspire de principes opposés aux siens. [70]

Le mérite qu'il accorde à Quetelet est que ce dernier a montré que l'on pouvait s'intéresser aux faits sociaux comme relevant de lois rigoureuses et laissant apparaître une régularité insoupçonnée. Le souci de Durkheim et de ses successeurs est alors de fonder une théorie philosophiquement valide qui définisse le fait social. Plus important que l'examen du fait social, l'enjeu est d'abord sa définition et la méthode permettant de l'analyser. La spécificité de Halbwachs est qu'il insiste beaucoup sur la méthode et dévelope une véritable épistémologie liée à l'utilisation de la statistique en sociologie. Comme cela est le cas pour tous les étudiants français en philosophie, Halbwachs effectue un voyage d'étude en Allemagne : il y est envoyé pour travailler

68. Ainsi, selon [Craig, 1979], pendant sa période strasbourgeoise, Halbwachs ne s'intéressa pas aux problématiques spécifiques de la région, et ce qu'il observa sur place nourrit peu sa réflexion. Il ne se considéra jamais comme alsacien.

69. On peut lire à ce sujet le texte qu'écrit Halbwachs à la mort de Simiand, [Halbwachs, 1936], où il évoque notamment les rapports de Simiand avec Bergson.

70. [Halbwachs, 1913, p. 10].

sur l'édition des *Manuscrits* de Leibniz. Pour ce projet franco-allemand, il doit collaborer avec le jeune philosophe allemand Ernst Cassirer. À partir de ce travail, Halbwachs publie en 1907 une étude de Leibniz ([Halbwachs, 1907]) qui fait date, et qui devint un des ouvrages à travers lequel les philosophes français du début du 20e se familiarisèrent avec le système leibnizien [71]. Ce travail est mené lors d'un séjour à Göttingen qui lui donne l'occasion de rencontrer Lexis (qui y enseigne depuis 1887) et ainsi de se familiariser avec l'œuvre de Quetelet. Halbwachs soutient sa thèse de doctorat, *La classe ouvrière et les niveaux de vie*, en 1912, ainsi que sa thèse complémentaire, *La théorie de l'homme moyen – Essai sur Quetelet et la statistique morale*, en 1913. Dans cette dernière, et nous y reviendrons, il critique de façon assez sévère l'usage de l'outil probabiliste par Quetelet, usage qui en effet ne résiste pas à une analyse conceptuelle rigoureuse.

À cause de sa myopie, Halbwachs n'est pas envoyé au front pendant la Première Guerre mondiale mais devient membre (avec Simiand) du cabinet du ministre de l'armement Albert Thomas. Dès la fin de l'année 1917, la décision est prise de créer une chaire de sociologie dans la future université de Strasbourg, la deuxième en France après celle de Durkheim. Elle est attribuée à Halbwachs, qui est reconnu comme un disciple de Durkheim. À Strasbourg, Halbwachs profite de l'atmosphère stimulante de dialogue et d'échange qui règne, il rencontre régulièrement philosophes (Martial Gueroult et Maurice Pradines), historiens (Marc Bloch, Lucien Febvre et Georges Lefebvre), psychologues (Charles Blondel), germanistes (Edmond Vermeil), juristes (Gabriel Le Bras), physiologistes (Emile Terroine) et bien sûr mathématiciens (Maurice Fréchet et Georges Cerf) [72]. Le dialogue permanent avec des représentants d'autres disciplines le pousse à s'intéresser aux limites de la sienne. Il a ainsi suivi de près les développements de la sociologie allemande (Strasbourg était idéalement située pour cela) et américaine, reprochant d'ailleurs à la première la trop grande attention portée à la théorie et à la seconde au contraire le manque d'idées et de vues directrices. Cette période strasbourgeoise est féconde pour sa recherche qui se déploie selon quatre axes : un travail sur la mémoire collective, sur lequel il entre en désaccord avec son maître Bersgon pour qui la mémoire est avant tout un phénomène individuel et non social ; une étude sur la formation des villes qui préfigure ce que l'on appelle maintenant la démographie ; des recherches, dans le prolongement de sa thèse, sur les classes sociales ouvrières ; et, ce qui nous intéresse ici, une réflexion sur l'utilisation du raisonnement probabiliste en sociologie. C'est en effet à Strasbourg et avec Fréchet qu'Halbwachs se met au courant des mathématiques du hasard et peut ainsi affiner sa réflexion entamée dans sa thèse complémentaire.

En 1935, alors que l'état d'esprit et la motivation qui règnent à Strasbourg s'effilochent et que les logiques de carrière reprennent le dessus, Halbwachs revient à Paris et occupe la chaire d'histoire de l'économie sociale à la Sorbonne où il poursuit son œuvre. En mai 1944, il est

71. Concernant les travaux de cette période sur Leibniz, on peut aussi signaler ceux d'Émile Boutroux et de Louis Couturat.

72. Cette liste des collaborateurs de Halbwachs est tirée de [Craig, 1979].

élu à la chaire de psychologie collective au Collège de France, où il n'a cependant jamais pu donner de cours. Halbwachs venait d'une famille catholique, mais sa femme Yvonne Basch, fille du cofondateur de la ligue des droits de l'homme Victor Basch, venait elle d'une famille juive. C'est en tant que complice de son fils résistant Pierre Halbwachs que Maurice Halbwachs est arrêté par la Gestapo en juillet 1944 et déporté au camp de concentration de Buchenwald où il meurt en mars 1945 [73].

1.4.2 Le raisonnement probabiliste chez Halbwachs

Insistons maintenant sur l'utilisation du raisonnement probabiliste chez Halbwachs. Pour cela, il faut commencer par parler de son analyse du hasard, puisque seul la présence du hasard peut justifier l'usage du calcul des probabilités. Halbwachs est un lecteur de Poincaré et il discute en détail dans *La théorie de l'homme moyen* le point de vue exprimé par ce dernier dans *Science et méthode*. Une des sources du hasard chez Poincaré se trouve dans les causes trop nombreuses et trop complexes pour être analysées individuellement. En particulier, de petites causes peuvent produire de grands effets. Ces considérations reposent sur des concepts de « grandeur » et de « petitesse » dont on pourrait croire qu'ils sont subjectifs, mais ils ne dépendent que de nos moyens d'observations (humains), et sont donc dénués d'ambiguïté du point de vue de l'ensemble des humains. Pour expliquer comment il est possible de révéler les lois du hasard, Poincaré introduit sa méthode des fonctions arbitraires. Par exemple, il prouve que si l'on mélange un jeu de cartes, quelque soit la manière dont on s'y prend, pour peu qu'elle ne soit pas trop simple [74], la répartition des cartes sera asymptotiquement proche, au bout d'un temps long, de la loi uniforme. Quelle que soit la convention faite sur la répartition initiale des cartes (c'est ici qu'intervient la « fonction arbitraire »), la loi de la probabilité obtenue à la fin du calcul n'en dépend pas.

À cela, Halbwachs répond que la notion de « grand effet » est une notion sociale. Si la différence entre deux effets (par exemple la bille de la roulette qui s'arrête sur rouge ou sur noir) est « grande », c'est parce qu'une règle sociale (le transfert d'argent entre deux parieurs) rend précisément l'effet grand de notre point de vue. Si la formation d'un cyclone est un « grand effet », c'est parce qu'un cyclone est susceptible de détruire les cultures et ainsi affamer une population. C'est donc sur des critères sociaux que nous jugeons de la grandeur des effets des phénomènes aléatoires. Mais surtout, pour Halbwachs, le concept clé sur lequel repose tout le calcul des probabilités est celui d'indépendance. Il faut que les conditions initiales soient réactualisées à chaque expérience, il faut que tout ordre qui aurait pu s'établir soit détruit, pour que les règles de calcul des probabilités soient valides. Secouer le cornet de dé, battre les cartes, faire tourner la roulette : tous ces dispositifs sont conçus pour éliminer toute forme d'organisa-

73. Pierre Halbwachs a survécu à la déportation. En revanche, les parents d'Yvonne Basch ont été assassinés par la milice en 1944.

74. Par exemple si les transformations du paquet de cartes n'admettent pas d'invariant, c'est-à-dire si la manière de mélanger ne garde pas une particularité de la condition initiale.

tion qui pourrait subsister. Ainsi deux lancers de dés consécutifs, deux mains successives distribuées, deux jeux de la roulette, sont bien indépendants puisqu'aucune organisation n'a pu être conservée entre les deux actions. Même si l'on s'intéresse à la prévision du temps, les influences extérieures et les lois du système atmosphérique sont telles que le système atmosphérique ne repasse jamais par le même état. Ou encore, si l'on s'intéresse à la théorie cinétique des gaz, ce sont les chocs incessants des molécules qui ont pour effet de briser toute organisation qui peut s'établir. Et c'est précisément cela qui révèle les lois du hasard :

> Rien n'exprime mieux les deux aspects de l'hypothèse qui est à la base de toute conception du hasard : il s'agit de défaire l'ordre (au sens mécanique) qui tend à s'établir en vertu de lois simples, en vue d'y substituer le désordre pur ; mais le désordre, à la limite, devient une *organisation*, puisque la loi de tous les éléments est d'être différents les uns des autres, et de le redevenir dès qu'ils sont en voie de se ressembler. [75]

L'indispensabilité de l'hypothèse d'indépendance apparaît au grand jour : l'indépendance n'est que la traduction de l'absence d'ordre mécanique qui permet d'atteindre le désordre total et donc l'application des lois du hasard.

La conséquence qu'Halbwachs en tire en vue de l'utilisation de la théorie des erreurs pour les faits sociaux est implacable : une telle utilisation est complètement illégitime. Rappelons ici brièvement que Quetelet, en observant que certains phénomènes biologiques (sexe des nouveaux-nés), physiologiques (taille, tour de poitrine) et « moraux » (mariages, suicides, crimes, etc.) se repartissent selon la loi des erreurs, en avait inféré l'existence d'un « homme moyen » qui serait le modèle du genre humain : chaque homme ne serait qu'une copie de l'homme moyen, une copie médiocre d'ailleurs car entachée d'une erreur, donnée justement par la théorie des erreurs. Chaque homme serait soumis à des causes constantes, réifiées à travers l'homme moyen, et des causes accidentelles soumises au calcul des probabilités. Or, la théorie des erreurs s'applique si l'erreur totale est la résultante d'un grand nombre de petites erreurs indépendantes. Pour Quetelet, les causes accidentelles sont nombreuses et indépendantes, et c'est leur effet combiné qui fait apparaître une distribution conforme à la loi des erreurs. Halbwachs commence par récuser la distinction entre cause accidentelle et cause constante. En effet, puisqu'Halbwachs reprend les idées de Poincaré, pour qui le caractère aléatoire des causes se jauge seulement par leur complexité, leur nombre et la grandeur de leurs effets, toute distinction ontologique entre deux sortes de cause est illégitime. Pour voir si le calcul des probabilités peut s'appliquer aux faits sociaux, il faut au contraire regarder si les causes sont indépendantes les unes des autres. Or, Halbwachs explique ensuite que pour les phénomènes sociaux, la régularité est première. Elle est le fait de la société et ne peut être celui des lois du hasard. Les causes affectant les hommes ne sont pas indépendantes puisqu'elles ont une même origine, la société.

> Loin que les influences de toutes sortes qui s'exercent sur les individus, et les réactions de ceux-ci, c'est-à-dire tout cet ensemble de forces subtiles, discontinues et désordonnées

75. [Halbwachs, 1913, p. 56-57].

> qu'on imagine, aboutissent à de telles régularités, ce sont ces régularités, c'est-à-dire les conditions générales d'existence de l'espèce et des groupes, qui devraient être posées d'abord, et les individus se borneraient à s'y conformer. [76]

La régularité constatée est tout sauf l'œuvre d'actions indépendantes, elle est au contraire une propriété du tout. Par exemple, quand des mesures sont faites de la taille des soldats d'un régiment, on oublie que certaines personnes sont mortes avant d'arriver à l'âge nécessaire pour entrer dans le régiment. Et la mortalité infantile n'est pas accidentelle, elle est fortement déterminée par la société dans laquelle l'enfant naît. Les causes affectant la taille de deux enfants différents (ici la mortalité infantile) ne sont pas indépendantes, c'est même tout le contraire. C'est le traitement des nouveaux nés par la société, qui n'est pas dû au hasard, qui explique les régularités constatées. De même pour les mariages, la rencontre avec le futur époux ou la future épouse n'est pas l'œuvre du hasard, elle dépend fortement des normes sociales. Dans [Halbwachs, 1923], la distinction est clairement faite entre, d'une part, la mesure d'une grandeur physique pour laquelle l'utilisation de la théorie des erreurs est justifiée :

> Ainsi, dans le cas des mesures d'une même grandeur physique, l'ensemble des mesures n'a aucune unité collective, aucune consistance interne : on pourrait supposer qu'elles ont été effectuées à des siècles de distance l'une de l'autre, par des hommes qui ne se sont pas connus et qui n'étaient point membres des mêmes sociétés. Le seul lien qui existe entre ces unités dissociées est extérieur à leur ensemble : c'est l'action matérielle de la grandeur, qui s'exerce isolément sur chaque observateur. [77]

et, d'autre part, le cas des prix des marchandises, où justement les différents prix d'un même produit et à une même époque sont tout sauf indépendants les uns des autres :

> Le lien qui existe entre ces prix, c'est la communauté d'appréciation d'un même objet ou d'un même service dans le groupe : chacun évalue une marchandise en tenant compte des jugements de prix antérieurs ou contemporains formulés par les autres ou par lui-même. [78]

Ainsi, la conclusion que tire Halbwachs de ses réflexions sur le calcul des probabilités est la suivante : s'il existe derrière un phénomène une cause sociale, alors le calcul des probabilités ne peut pas être utilisé parce qu'il présuppose l'indépendance des différentes entités qui sont justement liées par la cause sociale en question. Pour lui laisser ses propres mots,

> La société, et les démarches morales de ses membres, sont peut-être, dans toute la réalité, le domaine où il est le moins possible de considérer un individu et ses actes, abstraction faite de tous les autres : c'est laisser de côté l'essentiel. C'est dire que c'est le domaine où le calcul des probabilités s'applique le moins. [79]

Mais dès lors, quelle utilisation reste-t-il pour la statistique et le calcul des probabilités en

76. [Halbwachs, 1913, p. 61].
77. [Halbwachs, 1923, p. 361].
78. [Halbwachs, 1923, p. 361-362].
79. [Halbwachs, 1913, p. 174].

sociologie ? Car, avec Simiand, Halbwachs est pourtant parmi les héritiers de Durkheim celui qui a le plus insisté sur l'utilisation des méthodes quantitatives en sociologie. Pour Halbwachs, le groupe social est premier et ne peut se déterminer par la statistique. Une série de nombres n'est pas forcément une statistique (les kilométrages le long d'une route ne le sont pas) et seule une analyse sociologique peut déterminer sur quel groupe il faut récupérer des données chiffrées et les appeler statistique. Quetelet utilisait un critère statistique pour prouver la cohérence d'un groupe (le fait que les caractères se répartissent selon la loi des erreurs), c'est une aberration pour Halbwachs car la cohérence d'un groupe est du ressort de la sociologie. Mais, une fois le groupe déterminé, la statistique est justement indispensable pour saisir les caractéristiques du collectif qu'Halbwachs considère, dans la lignée de Durkheim, comme à la fois intérieures et extérieures à l'individu (elles sont en partie dans chaque individu tout en s'imposant à eux). Ainsi les caractéristiques étant en partie extérieures aux individus, le seul moyen de les saisir est à travers une statistique, statistique dont le calcul n'a de sens que parce que l'on a affaire à un groupe bien défini sociologiquement. La moyenne n'a de réalité que parce qu'elle se calcule sur un groupe consistant, et ce n'est d'ailleurs pas le seul indicateur pertinent : étudier les variations des caractéristiques à l'intérieur d'un groupe peut apporter de précieuses informations. Ces indicateurs sont de plus indispensables car ils apportent une information qui ne peut se voir sur aucun cas individuel.

> Une statistique véritable (en sociologie) c'est un ensemble de chiffres qui se rapportent à un groupe d'hommes ou de faits humains. [...] Un groupe est un ensemble qui représente *un tout consistant*, c'est-à-dire dont les membres sont rassemblés en vertu d'un caractère qui leur est commun à tous, et qui ne se rencontre pas hors d'eux. C'est encore *un ensemble tel que chacun de ses membres en représente un aspect, mais qui n'est représenté tout entier que dans la totalité de ceux qui en font partie*.
>
> De cette définition il résulte que la statistique est la seule méthode qui permette d'explorer et de reconnaître ces caractères, et qu'une observation limitée à un ou quelques cas n'y suffirait point. [80]

Par conséquent, la monographie [81], par exemple, ne pourra jamais saisir les caractéristiques du groupe social, puisqu'elle se limite à quelques cas alors que les causes sociales impriment des mouvements qui ne peuvent se voir à travers l'étude des cas individuels. Ce n'est pas tout : pour qu'une statistique soit une bonne statistique, pour qu'elle saisisse un phénomène en train de se produire, il faut qu'elle soit faite dans la durée, et pas simplement à des années d'intervalle. En effet, la société est en perpétuel déséquilibre, en perpétuelle évolution, le sociologue doit donc prendre en compte cet aspect. Une même statistique faite à plusieurs années d'intervalle n'a pas de sens puisque les groupes sociaux ont probablement perdu leur consistance entre les deux instants où la statistique est établie.

Le sociologue est en un sens un expérimentateur, ou plutôt c'est la société qui se charge

80. [Halbwachs, 1931, p. 372].
81. L'étude détaillée et exhaustive d'un cas particulier.

d'expérimenter pour lui. La société lui fournit les groupes sur lesquels il peut construire ses statistiques, voire lui fournit les moyens de recueillir ses statistiques. C'est la société qui trie, crée des catégories, différencie les individus. Par exemple, c'est la société qui permet l'enregistrement des liens de filiation à travers une institution comme le mariage : sans une telle institution, une étude de la taille des enfants en fonction de celle des parents serait impensable. Celui qui veut effectuer une telle étude devrait remercier la société de la lui permettre, alors même qu'il a l'impression de recueillir des statistiques qui sont naturellement là.

C'est alors que peut intervenir le calcul des probabilités, et ce à deux titres. Tout d'abord, l'inadéquation entre des séries statistiques et des séries produites au hasard, suivant les règles du calcul des probabilités, permet de montrer l'existence de causes sociales. En effet, s'il y a une cause sociale, alors les différents nombres de la série statistique ne peuvent pas être obtenus à partir d'une hypothèse d'indépendance mutuelle, c'est-à-dire à partir du calcul des probabilités. Précisons que cette idée, à savoir de comparer les observations réelles à ce qui passerait si elles étaient obtenues par hasard, n'est pas nouvelle et se retrouve déjà chez Laplace, ainsi que chez Borel [82]. Le calcul des probabilités permet alors de rendre rigoureux et d'objectiver l'argument qui dit qu'un phénomène qui « ne peut pas être dû au hasard » doit être expliqué par une cause (sociale). Mais surtout le calcul des probabilités justifie l'utilisation de procédures statistiques (comme le fait de prendre la moyenne) qui permettent au sociologue d'expérimenter en éliminant certains facteurs causaux. En effet, de même que le physicien fixe dans une expérience tous ses paramètres sauf un qu'il fait varier, le sociologue peut fixer un facteur causal à travers une opération de moyenne. Par exemple, si le taux de chômage présente une variation interannuelle et une variation intersaisonnière, en moyennant sur différentes années, la variation interannuelle est éliminée et seule reste celle intersaisonnière. En traitant la variation interannuelle comme si elle était dûe au hasard (ce qui justifie l'emploi de la moyenne), le sociologue peut l'oublier et se concentrer sur un seul facteur causal, ici l'influence de la saison.

Une tension apparaît donc dans l'utilisation du calcul des probabilités : indispensable comme outil pour analyser le phénomène social, il ne peut cependant jamais en saisir l'essence :

> Je ne peux, en résumé, éliminer l'action d'un ensemble de facteurs, pour étudier isolément l'action des autres, qu'en appliquant une loi de probabilité. Mais, inversement, je ne peux attribuer un sens à l'action de ces autres facteurs, et je n'ai des raisons de l'étudier, que parce que les variations correspondantes forment un ensemble consistant, que parce que, dans notre exemple, les variations du chômage d'un mois à l'autre dépendent les unes des autres, c'est-à-dire ne sont pas soumises à une simple loi de probabilité. [83]

La statistique mathématique est donc simplement présentée comme un outil pour le sociologue, indispensable tout en ne contenant pas l'essence de la discipline.

82. Borel utilise notamment cette idée pour étudier de façon rigoureuse la graphologie d'Alfred Binet, cf. p. 17.
83. [Halbwachs, 1923, p. 370].

> [...] [l'école sociologique française] considère la statistique comme un instrument scientifique qui doit être avant tout bien adapté à son objet, et qu'il faut juger sur son rendement. [84]

Selon [Martin, 1999], la statistique est génératrice d'une tension chez Halbwachs : d'un côté il voit qu'elle est indispensable pour identifier les causes sociales et assurer une méthode expérimentale à la sociologie, de l'autre il craint que le groupe social soit réduit à ses manifestations statistiques et perde sa spécificité. En conséquence, Halbwachs n'a de cesse de dénoncer les excès et les limites de la statistique, tout en étant le disciple de Durkheim qui en a le plus promu l'usage.

1.5 Réception et postérité de l'ouvrage

Pour mieux situer ce livre inédit qu'est *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, il est naturel de s'intéresser à sa réception et à sa postérité. Signalons dès maintenant une limite dans ce qui suit : si le livre est écrit pour « le médecin, le démographe, l'actuaire, l'agent d'assurance, etc. » [85], nous ne connaissons pas, faute de documentation, son impact auprès de ces publics. Nous nous sommes contentés de lister les recensions consécutives à sa publication ainsi que les renvois qui y sont faits par la suite dans les publications académiques.

Le calcul des probabilités à la portée de tous est le seul ouvrage que Fréchet et Halbwachs ont écrit ensemble. Bien qu'ils eussent promis dans la préface d'écrire un deuxième volume discutant de la théorie des erreurs ou de la covariation si leur livre emporte l'adhésion du public, une telle suite n'a jamais été publiée. Cela alors que l'accueil de leur ouvrage a été, comme nous allons le voir, très favorable, du moins en ce qui concerne le monde académique. Par la suite, Fréchet ne prit pas part aux travaux d'Halbwachs et inversement, bien qu'ils produirent chacun de leur côté des réflexions sur l'utilisation des mathématiques du hasard en statistique. Halbwachs continua à réfléchir sur l'utilisation de la méthode statistique en sociologie [86], et Fréchet à diffuser la culture statistique auprès des acteurs des sciences humaines. Mais, par exemple, lorsque Fréchet donne une conférence en 1949 au Palais de la découverte, intitulée *Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen* ([Fréchet, 1955d]), il ne fait aucune référence à la thèse complémentaire de Halbwachs qui porte pourtant sur ce sujet. L'objection à la théorie de Quetelet qu'il présente dans cette conférence est celle qu'il attribue à Bertrand [87], mentionnant l'individu moyen serait difforme [88]. Fréchet s'efforce ensuite de répondre à cette

84. [Halbwachs, 1931, p. 370].
85. [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. VI].
86. Cf. [Martin, 1999] pour une synthèse de telles réflexions.
87. Cette objection est faite à l'origine par Cournot. Elle est déjà évoquée dans [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. 134–136]. Dans ce passage, il est déjà suggéré que l'utilisation d'autres valeurs typiques, comme la médiane au lieu de la moyenne, permettrait d'obtenir un homme typique qui ne serait pas difforme.
88. L'exemple typique est celui d'une sphère : en présence de deux sphères, l'une de rayon 1 et de volume unité (quitte à changer l'unité de volume), l'autre de rayon 3 et donc de volume 27, la sphère moyenne aurait un rayon de 2 et un volume de 14, ce qui ne correspond aux dimensions d'aucune sphère existante. La sphère moyenne est difforme. De manière plus générale, un individu dont chaque caractéristique est la moyenne des caractéristiques

objection en construisant, à l'aide d'opérations mathématiques légèrement plus élaborées que la moyenne, un moyen d'identifier dans une population un individu typique (qui est un membre bien réel de la population et pas un être fictif) qui soit le plus représentatif de la population. Et il insiste sur le fait que l'outil mathématique utilisé pour caractériser l'individu « le plus représentatif » comporte une part de convention qu'il faut toujours garder à l'esprit. Mais aucune des objections d'Halbwachs sur les conditions d'applicabilité de la statistique aux phénomènes sociaux n'est évoquée.

1.5.1 Réactions consécutives à la publication (1924–1925)

Venons en maintenant aux recensions que nous avons réussi à repérer : on en trouve une de Robert Deltheil dans la *Revue générale des sciences* ([Deltheil, 1924]), une d'Adolphe Bühl dans *L'enseignement mathématique* ([Bühl, 1924]) et une d'Henri Piéron dans *L'année psychologique* ([Piéron, 1924]). Sans compter que le livre est cité dans un article d'André Lalande ([Lalande, 1925]) et a reçu le prix Montyon de statistique en 1925.

Pour les recensions, nous présentons d'abord successivement les trois auteurs afin de pouvoir ensuite discuter simultanément et ainsi comparer le contenu proprement dit des recensions.

Robert Deltheil (1890–1972) fait partie de ces normaliens meurtris par la Première Guerre mondiale (il y est gravement blessé) que Borel a pris sous son aile. Après la guerre, grâce à Borel, il est nommé à la faculté de Toulouse, où il passa toute sa carrière. Il soutient en 1920 une thèse sur les probabilités géométriques, c'est d'ailleurs la seule véritable thèse en probabilité que Borel ait dirigé. Deltheil est l'un des auteurs du *Traité* de Borel, le fascicule qu'il rédige, publié en 1926, porte sur le sujet de sa thèse, à savoir les probabilités géométriques. Il n'est pas étonnant qu'il ait entendu parler du livre de Fréchet et Halbwachs : Borel est bien évidemment au courant de la parution de ce livre et a pu le signaler à Deltheil.

L'auteur de la recension dans *L'enseignement mathématique*, Adolphe Bühl (1878–1949), est lui un mathématicien autodidacte. À l'age de 14 ans, il est paralysé au point d'être totalement immobilisé pendant des années (par la suite, il a eu besoin de béquilles pour se déplacer). Son isolement le pousse à s'intéresser par lui-même aux mathématiques et il en vient à soutenir en 1901 une thèse à la faculté des sciences de Paris sur les équations différentielles devant un jury composé de Darboux, Poincaré, et Appell. Il est nommé en 1903 à la faculté des sciences de Montpellier puis en 1909 à celle de Toulouse. Il participe à la revue *L'enseignement mathématique* à partir de 1903 et la dirige à partir de 1920. Sa nécrologie précise que cette revue lui doit « de nombreux articles bibliographiques toujours très approfondis »[89], de sorte qu'il n'est pas aberrant qu'il ait écrit une recension pour le livre de Fréchet et Halbwachs.

Enfin, Henri Piéron (1881–1964) est un personnage d'une envergure supérieure aux deux autres. Fils d'un normalien mathématicien, issu d'un milieu riche intellectuellement parlant, il

d'une population ne correspondrait à aucun individu de la population en question.

89. [Fehr, 1950, p. 7].

refuse de suivre les traces de son père : il se tourne vers la philosophie au lieu des mathématiques et choisit de ne pas aller à l'ÉNS. Agrégé de philosophie en 1903, il se tourne vers des activités plus appliquées et soutient une thèse sur la psychologie du sommeil en 1913. En 1907, nommé maître de conférence à l'École Pratique des Hautes Études (EPHE), il fait de sa première leçon un manifeste pour une nouvelle psychologie, plus scientifique, qui doit se fonder sur l'étude du comportement et non de la conscience (car celle-ci est fondamentalement une expérience subjective et ne pourra jamais être prise comme objet de science). Cette leçon, un ≪ texte fondateur qu'aucune histoire de la psychologie ne peut ignorer ≫ [90], est d'ailleurs publiée en 1908 dans la *Revue du mois* de Borel. Par la suite, Piéron s'est battu pour que la psychologie scientifique acquiert un espace institutionnel dans le monde académique, et il l'a fait en allant dans des institutions autre que les universités : EPHE, Collège de France (où il possède une chaire à partir de 1923) et plus tard CNRS. Ces institutions, moins touchées par les rigidités disciplinaires que les universités, lui ont permis de mettre en œuvre son programme et d'institutionnaliser une nouvelle discipline. Grand lecteur, éditeur de *L'année psychologique*, Piéron produisit un nombre important d'analyses bibliographiques.

Les trois recensions soulignent le caractère curieux mais intéressant de cette entreprise de présentation du calcul des probabilités au plus grand nombre. Toutes saluent la performance des auteurs qui ont réussi à n'employer que des mathématiques élémentaires. Elles soulignent que le livre est écrit par deux auteurs aux compétences différentes, Bühl parle d'ailleurs pour Halbwachs d'un ≪ sociologue naturellement statisticien ≫ [91]. Les deux mathématiciens Deltheil et Bühl reconnaissent que le néophyte trouvera forcément un intérêt dans ce livre puisqu'il pourra se familiariser avec le calcul des probabilités ; mais que le mathématicien aussi y trouvera son compte, car le livre arrive à des résultats poussés à l'aide de méthodes élémentaires. Ainsi, pour Deltheil,

> Le lecteur averti reconnaîtra non sans étonnement, dans les derniers chapitres, qu'on peut étudier avec des ressources mathématiques tout à fait limitées des problèmes difficiles. [92]

Et Bühl souligne aussi l'intérêt pour le mathématicien :

> Le Calcul des Probabilités prend ainsi, à la fois une forme utilitaire qui sera très appréciée des praticiens et une forme esthétique spéciale très propre aussi à intéresser ceux qui le connaissent avec l'appareil analytique habituel. [93]

Dans la recension de Bühl, en guise de conclusion, on sent poindre une certaine admiration pour le type de résultats auxquels Fréchet et Halbwachs sont arrivés :

> [...] ce qui paraît caractériser l'œuvre de MM. Fréchet et Halbwachs, [...], c'est plutôt la volonté d'être d'abord élémentaire mais de faire donner aux méthodes employées tout ce

90. [Galifret, 1989, p. 204].
91. [Bühl, 1924].
92. [Deltheil, 1924].
93. [Bühl, 1924].

> qu'elles sont susceptibles de donner. On est alors très agréablement surpris de voir tout ce qu'elles donnent. [94]

En revanche, point de telles remarques dans la recension de Piéron. Il n'est pas sensible à la façon novatrice d'exposer le calcul des probabilité, pour lui l'intérêt de ce livre est notamment qu'il contient les méthodes statistiques utiles pour le praticien :

> On trouvera, dans le petit traité de Fréchet et Halbwachs, toutes données utiles sur la comparaison des valeurs moyennes et médianes, sur les différentes formules des écarts, sur la probabilité des causes, etc. [95]

Et, preuve de son intérêt pour l'exposé concret des méthodes statistiques, Piéron attend avec impatience la suite (qui ne viendra jamais), puisque devaient y figurer les méthodes statistiques les plus récentes (coefficient de corrélation, théorie des erreurs, etc.).

Signalons aussi, même s'il ne s'agit pas d'une recension à proprement parler, que le livre de Fréchet et Halbwachs est mentionné dans [Lalande, 1925]. Dans cet article, qui se donne pour objectif de brosser un tableau exhaustif de l'état de la philosophie en France en 1924, *Le calcul des probabilités à la portée de tous* est évoqué dans la partie concernant les travaux liant science et philosophie. Lalande qualifie ce livre comme relevant de la ≪ science pure ≫ [96], et c'est d'ailleurs seulement à cette occasion qu'apparaît le nom d'Halbwachs dans l'article. Le contenu du livre n'est pas discuté, mais Lalande ne peut s'empêcher d'encourager ce type de travail, non sans adresser une pique à l'attention des scientifiques :

> [Le livre de Fréchet et Halbwachs] n'est rien d'autre qu'une curiosité intéressante, mais il me semble que ce genre de collaboration, si l'amour-propre du scientifique le permet, serait un moyen de valeur pour perfectionner de tels travaux de vulgarisation et d'instruction. [97]

L'Académie des sciences décerne à Fréchet et Halbwachs le prix Montyon de statistique [98] en 1925 pour leur ouvrage *Le calcul des probabilités à la portée de tous* [99]. La commission d'attribution, composée de Boussinesq, Picard, Appell, Tisserand, Lecomte, d'Ocagne et Borel, a dû choisir entre *L'oreille et ses rapports avec la taille, la grande envergure, le buste, le pied, le crâne chez les criminels* de Charles Perrier, *Les risques de mortalité et de morbidité dans leurs rapports avec l'assurance et la prévoyance sociales* de Paul Razous, et le livre de

94. [Bühl, 1924].
95. [Piéron, 1924].
96. [Lalande, 1925, p. 542], ≪ a work of pure science ≫. Notre traduction
97. [Lalande, 1925, p. 542-543] : ≪ This is but an interesting curiosity, but it seems to me that this kind of collaboration, if the self-esteem of scientists would permit of it, would be a valuable means of perfecting such works of popularization and instruction. ≫. Notre traduction.
98. Ce prix, créé en 1817, l'a été dans des circonstances relatées dans [Brian, 1991]. Le but était alors de favoriser la rencontre entre les élites savantes et administratives sous la Restauration : grâce à ce prix, l'Académie, qui détient le monopole de la légitimité scientifique, peut attirer l'attention des profanes (et notamment de l'élite administrative) sur un ouvrage que les experts ont consacré. Le prix joue un rôle dans la transmission et la diffusion d'un héritage intellectuel qui avait pris naissance à la fin de l'Ancien Régime. Parmi les lauréats de ce prix, on trouve les noms de Louis-Adolphe Bertillon (1876), Émile Cheysson (1891), ou encore Lucien March (1907).
99. Annoncé par exemple dans [Bul, 1925, p. 246].

Fréchet et Halbwachs [100]. À cette occasion, Fréchet envoie une lettre à l'Académie des sciences (retranscrite en annexe) où il attire l'attention des membres du jury sur les passages du *Calcul des probabilités à la portée de tous* qui lui paraissent les plus importants. Ce document est précieux, en ce qu'il permet de voir ce que Fréchet estime avoir fait d'original dans cet ouvrage. Si l'Académie des sciences récompense Fréchet pour « l'ensemble de ses travaux sur le calcul des probabilités », Halbwachs n'obtient qu'une mention honorable, et seulement pour *Le calcul des probabilités à la portée de tous*.

1.5.2 Réactions postérieures à la publication (1926–1946)

Comme nous venons de le voir, la publication du livre de Fréchet et Halbwachs a eu beaucoup d'échos dans le monde académique, il a été lu par des figures importantes de la vie intellectuelle française, comme Henri Piéron. En revanche, il n'a suscité que peu de développements par la suite. En dehors des publications de Fréchet et Halbawchs, nous n'avons trouvé de références bibliographiques à ce livre, jusqu'à la Seconde Guerre mondiale, que dans [Boll, 1929], [Deltheil, 1931], [Lurquin, 1932], [Guldberg, 1933], [Mauss, 1933], [De Finetti, 1937] et [Stoetzel, 1946].

Passons rapidement sur les articles de Marcel Mauss ([Mauss, 1933]) et de Jean Stoetzel ([Stoetzel, 1946]). En effet, les deux se veulent être, dans des contextes bien différents d'ailleurs, des passages en revue de l'état de la sociologie en France. Quand ces articles en viennent au rôle d'Halbwachs en tant que sociologue, ils soulignent qu'Halbwachs était « spécialiste de la statistique et du calcul des probabilités » [101], la preuve en étant la publication du *Calcul des probabilités à la portée de tous*. L'article de Deltheil ([Deltheil, 1931]) se veut être une description de l'évolution du calcul des probabilités depuis le début du 20e, et de son renouvellement consécutivement à la publication des ouvrages de Bertrand et Poincaré. Le livre de Fréchet et Halbwachs y est qualifié de « remarquable ouvrage de vulgarisation » [102] lorsque Deltheil énumère les manuels publiés depuis le début du 20e siècle. L'article de Lurquin ([Lurquin, 1932]) vise à établir la paternité d'une certaine méthode de démonstration du théorème de Bernoulli et de la loi des grands nombres [103]. Dans son article, Lurquin souligne que Chebyshev était au courant des travaux de Bienaymé, et que Fréchet et Halbwachs se trompent quand ils affirment que Chebyshev a retrouvé cette méthode indépendamment de Bienaymé. L'article d'Alf Guldberg ([Guldberg, 1933]), issu d'une conférence donnée à l'IHP, est un article de recherche en mathématique. Le livre de Fréchet et Halbwachs est convoqué seulement en préambule d'une étude des propriétés mathématiques de la loi de Poisson : Gulbderg cite une remarque du *Calcul des probabilités à la portée de tous* expliquant en quoi cette loi de Poisson est un cas limite particulièrement utile de la loi binomiale. Comme on le voit, les cinq

100. Ce sont du moins les seuls livres mentionnés dans les archives conservées à l'Académie des sciences.
101. [Stoetzel, 1946, p. 81].
102. [Deltheil, 1931, p. 103].
103. L'histoire de cette démonstration est discutée en détail dans la section 2.2.3.

références présentées ci-dessus ne renvoient pas au cœur de l'ouvrage de Fréchet et Halbwachs. C'est moins le cas pour les deux que nous allons discuter maintenant.

Marcel Boll (1886–1971) est un personnage un peu oublié, bien qu'il a joué un rôle important dans la vie intellectuelle et scientifique française du début du 20e siècle. Alors qu'il semble promis à une brillante carrière académique (élève de l'École de physique et de chimie de la ville de Paris, agrégation de physique en 1910, soutenance d'une thèse en 1914), il se détourne de la recherche. Il devient professeur de physique et de chimie à HEC où son activité est limitée car il n'y a pas de laboratoire de recherche, et devient un « commentateur attitré de l'actualité scientifique et philosophique » [104]. Il publie énormément, notamment dans les journaux tout public mais aussi dans des collections en vue (comme la collection *Que sais-je ?*). Il se revendique lui-même comme le propagandiste du scientisme (il est membre fondateur de l'*Union rationaliste*), et il participe à l'introduction des idées du cercle de Vienne en France. Son article de 1929 ([Boll, 1929]), publié dans la *Revue générale des sciences*, part du constat que le calcul des probabilités n'est pas assez enseigné alors qu'il prend une importance de plus en plus croissante dans la vie pratique. Après une rapide exposition du calcul des probabilités, dans laquelle il véhicule sur la valeur du calcul des probabilités et l'attitude à adopter face aux jeux de hasard un point de vue proche de celui de Borel, il propose un programme pour l'enseignement du calcul des probabilités au lycée. Dans la bibliographie qui suit l'article se trouve le livre de Fréchet et Halbwachs. Et dans la discussion qui suit la bibliographie, la probabilité est présentée d'une façon similaire à [Fréchet et Halbwachs, 1924], c'est-à-dire comme une grandeur physique dont on peut obtenir une approximation de manière empirique. Le livre de Fréchet et Halbwachs est donc cité dans l'esprit qui constitue sa vocation originelle, c'est-à-dire comme vecteur de la diffusion du calcul des probabilités au plus grand nombre.

L'article de de Finetti ([De Finetti, 1937]), issu de la conférence qu'il a donnée en 1935 à l'IHP, est sans doute, parmi tous les articles qui citent *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, celui qui a eu le plus de résonance (ce succès étant tout à fait indépendant du fait qu'il cite cet ouvrage). Bruno de Finetti (1906-1985) est un probabiliste italien, ses travaux mathématiques ont notamment concerné les processus en temps continu. Vers la fin des années 20, il commence à s'intéresser à la question des fondements des probabilités, et il arrive à faire brillamment s'imbriquer résultats mathématiques et conceptions philosophiques. Il propose en 1931 une vision totalement subjective du concept de probabilité comme mesure du degré de croyance, et qui peut s'attribuer à l'aide de la méthode des paris [105]. Cette vision fût exposée pour la première fois de façon complète et cohérente précisément dans son article de 1937, dans lequel il fait référence au livre de Fréchet et Halbwachs. De Finetti a probablement eu connaissance de l'existence du livre à travers sa correspondance avec Fréchet, correspondance entretenue à propos de la question de l'additivité dénombrable de la probabilité [106]. Au cours de

104. [Schöttler, 2010, p. 149].

105. La cote à laquelle un individu est prêt à prendre un pari sur l'arrivée d'un événement renseigne sur la probabilité subjective que cet individu attribue à l'événement en question.

106. La question est la suivante : peut-on dire que la probabilité d'une union dénombrable d'événements disjoints

cet échange, pour défendre la thèse de l'additivité dénombrable, Fréchet se réfère à la définition de la probabilité qu'il donne dans [Fréchet et Halbwachs, 1924], à savoir un nombre dont on obtient une approximation en regardant des fréquences de réalisation pour un nombre grand mais fini d'épreuves. De Finetti arrive néanmoins à montrer, en suivant la logique de la définition de Fréchet, que l'additivité dénombrable n'est pas prouvée par l'interprétation empirique de Fréchet. Néanmoins, cette discussion ne transparaît pas dans l'article de de Finetti de 1937, le livre de Fréchet et Halbwachs est simplement cité comme faisant partie de ceux qui défendent une interprétation fréquentiste de la probabilité :

> On croit souvent pouvoir échapper à ces objections [le fait que les fréquences de réalisation d'un événement ne peuvent pas être prédites] en observant que l'impossibilité de préciser les relations entre probabilités et fréquences est analogue à l'impossibilité pratique qu'on rencontre dans toutes les sciences expérimentales à relier exactement les notions abstraites de la théorie avec les réalités empiriques (1). L'analogie est, à mon avis, illusoire : dans les autres sciences on a une théorie qui affirme et prévoit avec certitude et exactitude ce qui devrait arriver si elle était tout à fait exacte ; dans le calcul des probabilités c'est la théorie elle-même qui nous oblige à admettre la possibilité de toutes les fréquences. Dans les autres sciences, l'incertitude découle bien donc de la liaison imparfaite entre la théorie et les faits ; dans notre cas, au contraire, elle ne peut avoir son origine dans cette liaison, mais dans le sein de la théorie elle-même.
>
> [Note de bas de page de de Finetti] (1) Ce point de vue est soutenu, avec des variantes plus ou moins profondes, dans la plupart des traités modernes, entre autres ceux de Castelnuovo (*Calcolo delle probabilità*, 1925), Fréchet-Halbwachs (*Le calcul des probabilités à la portée de tous*, 1924), Lévy (*Calcul des probabilités*, 1925), von Mises (*Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928*). [107]

est égale à la somme (infinie donc) des probabilités de ces événements ? Si le calcul des probabilités n'est vu que comme une application de la théorie de la mesure, alors la réponse doit être positive ; mais de Finetti a lui argumenté qu'il n'y a pas de raison logique, simplement au vu de la définition de la probabilité, que ce soit le cas. Les échanges entre de Finetti et Fréchet sont présentés et analysés dans [Regazzini, 2013].

107. [De Finetti, 1937, p. 23].

Chapitre 2

Présentation du *Calcul des probabilités à la portée de tous*

Après avoir explicité le contexte de production du *Calcul des probabilités à la portée de tous*, nous en venons à la description proprement dite de l'ouvrage. On trouvera ici un résumé du contenu de livre et des pistes de lecture transversales.

2.1 Contenu du livre

Introduction

Dans l'introduction, Fréchet et Halbwachs s'opposent à une approche *a priori* et adoptent une présentation empirique. Ils justifient ce choix, qui va à l'encontre de la présentation traditionnellement faite dans les manuels, en argumentant qu'il est meilleur du point de vue pédagogique et plus adapté pour traiter des statistiques. Les exemples qu'ils choisissent pour illustrer leur propos ne proviennent pas des jeux de hasard, mais de réelles données statistiques. Ils introduisent alors la notion de fréquence et affirment que, une fois la catégorie d'épreuves fixée, la fréquence de réalisation d'un événement varie peu d'un groupe à l'autre pour peu que les groupes choisis pour la calculer soient assez nombreux. Ce résultat, qu'ils appellent la loi expérimentale du hasard, est pour eux une constatation empirique (ils s'appuient sur l'exemple de la fréquence des garçons parmi les enfants morts-nés pour l'introduire), et permet de définir la probabilité d'un événement de manière analogue à une grandeur physique, comme un nombre dont on obtient une approximation en calculant la fréquence de réalisation de l'événement dans un groupe d'épreuves suffisamment grand. Fréchet et Halbwachs insistent sur la question du choix de la catégorie d'épreuves : si celle-ci est trop restreinte, alors il n'est pas possible de trouver un groupe suffisamment grand et donc de connaître la probabilité avec une précision raisonnable ; mais si elle ne l'est pas assez, la probabilité ne porte pas sur des événements bien définis.

2.1.1 Combinaisons des probabilités

Ce long chapitre vise à établir les règles de base du calcul des probabilités : le théorème des probabilités totales (c'est-à-dire l'identité que l'on écrit maintenant $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, valable pour peu que A et B soient des événements disjoints) et celui des probabilités composées (qui s'écrit $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$). Leurs démonstrations passent à chaque fois par des égalités portant sur les fréquences, qui s'obtiennent facilement, puis par un ≪ passage à la limite ≫ puisque les fréquences représentent des valeurs approchées des probabilités. L'indépendance des événements est définie de la manière suivante : deux événements sont indépendants si la probabilité du premier sachant que le deuxième s'est produit ne diffère pas de la probabilité du premier ; autrement dit les événements A et B sont indépendants si $P(A|B) = P(A)$. Les deux théorèmes fondamentaux sont ensuite généralisés de la manière suivante : si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une disjonction de l'ensemble des issues, alors la probabilité d'un événement E vaut

$$P(E) = P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + \ldots + P(E|A_n)P(A_n).$$

Le chapitre se conclut sur des considérations à propos des événements qui ne sont pas indépendants, en particulier la formule du crible, qui s'écrit maintenant

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_i P(E_i) - \sum_{i,j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i,j,k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \ldots,$$

est établie par récurrence.

Pour faire le lien avec d'anciennes définitions de la probabilité, Fréchet et Halbwachs introduisent le concept de *cas* comme découpage subjectif des résultats d'une épreuve. Si le découpage est exhaustif et fait de telle sorte que les cas ont tous la même probabilité d'arriver, la probabilité d'un événement est bien le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas. Mais le fait que les cas soient également probables ne peut que se constater empiriquement, aucun raisonnement *a priori* (comme des considérations de symétrie dans les jeux de hasard) ne peut parvenir à cette conclusion selon Fréchet et Halbwachs.

Dans le chapitre se trouve une longue série (elle s'étale sur 13 pages) de problèmes classiques (les probabilités d'obtenir des combinaisons spécifiques en tirant des cartes ou encore d'obtenir un mot donné en tirant des lettres au hasard) pour montrer comment s'utilisent les formules établies précédemment. Alors que le livre utilise beaucoup d'exemples issus de statistiques, les problèmes concernent ici dans leur grande majorité des jeux de hasard.

2.1.2 Théorie des probabilités continues ou géométriques

Ce chapitre traite du problème des probabilités continues, lorsque la distinction entre événements favorables et défavorables ne peut se faire de manière aussi nette et tranchée que, par exemple, entre la pièce qui tombe sur son côté pile ou son côté face. Depuis les objections de Bertrand et son célèbre paradoxe [1], ce thème apparaît dans tous les ouvrages français : il est notamment traité par Poincaré, Borel, et ici Fréchet et Halbwachs. D'ailleurs, ce chapitre est indépendant du reste du livre : Fréchet et Halbwachs n'interprètent pas dans la suite la loi limite de Laplace en terme de probabilités continues, elle est seulement vue comme une procédure d'approximation de la loi binomiale. L'enjeu du chapitre est donc surtout de répondre aux objections des probabilistes français les ayant précédés concernant les probabilités continues. La courbe de probabilité (maintenant la densité de probabilité) est ainsi définie de façon expérimentale : une fois que la catégorie d'épreuves est fixée, la valeur de la probabilité peut être approximée à l'aide des fréquences de réalisation d'événements pris au hasard dans cette catégorie d'épreuves. La méthode des fonctions arbitraires de Poincaré, qui montre que dans certains problèmes le résultat final ne dépend pas de la forme précise de la courbe de probabilité, est abordée à travers l'exemple de la roulette. Quant au paradoxe de Bertrand, alors que Poincaré en tirait la conclusion qu'il est nécessaire de faire une convention au début de chaque calcul de probabilité, Fréchet et Halbwachs répondent que c'est la manière dont l'expérience est concrètement réalisée qui fixe la signification de la définition de « corde tirée au hasard sur un cercle », ou qui plus généralement détermine la « courbe de probabilité » dans le cas continu. Des exemples où un point est tiré au hasard sur un plan (et non plus seulement sur un objet unidimensionnel) sont abordés.

2.1.3 Probabilité des hypothèses (ou des causes)

La formule de Bayes, objet de ce court chapitre, est introduite avec des exemples issus des jeux de hasard et également de considérations statistiques (la probabilité qu'un des individus morts dans une population le soit à un âge donné). Elle est démontrée en calculant de deux manières différentes la probabilité que l'événement et une de ses hypothétiques causes soient arrivés. Fréchet et Halbwachs insistent sur le fait que la probabilité *a priori* ne peut être prise uniforme sans raison, et qu'au contraire elle se lit dans les séries statistiques. Ils reprennent ensuite un exemple lié à un jeu de cartes qui se trouve déjà chez Poincaré et Borel. Dans le jeu de l'écarté, le donneur doit retourner une carte qui détermine l'atout. Si cette carte est un roi, il récupère immédiatement un point. La question est alors : si votre adversaire donne le roi, quelle est la probabilité pour que ce soit un tricheur [2] ? Cet exemple permet à Fréchet et Halbwachs de préciser le sens qu'ils donnent à la probabilité *a posteriori* donnée par la formule de Bayes : dire que la probabilité que l'hypothèse H soit vraie sachant que l'événement E vient d'être observé est de p signifie que, dans un groupe assez large, on aura raison dans une proportion p des épreuves en disant que H est vraie après avoir observé E. Pour Fréchet et Habwachs, la formule de Bayes ne concerne pas le cas individuel, l'hypothèse H n'est pas plus ou moins vraie après

1. Ce paradoxe montre que la définition d'une « corde tirée au hasard sur un cercle » ne se suffit pas à elle-même, qu'elle renvoie à plusieurs lois de probabilités différentes.

2. Fréchet et Halbwachs préfèrent d'ailleurs utiliser le mot « Grec » comme synonyme de tricheur.

que E soit arrivé, c'est seulement sur un grand nombre d'épreuves que la probabilité p acquiert un sens.

2.1.4 L'espérance mathématique

L'espérance mathématique fait l'objet d'un court chapitre. Elle est définie comme le droit à payer pour entrer dans un jeu où une somme S peut être gagnée avec probabilité p. Ou, de manière équivalente, comme la somme à payer pour s'assurer contre un dommage coûtant S et arrivant avec probabilité p. Pour établir que la valeur de l'espérance est pS, il est imaginé un grand nombre N de personnes jouant à ce jeu : la proportion de gagnants parmi ces personnes est d'environ p, de sorte que la somme pNS est gagnée, et chaque personne paye la même somme E à l'entrée, c'est-à-dire que EN est versée. Ces deux quantités étant égales, on peut bien en déduire la formule $E = pS$: cette formule n'est donc pas une définition. À partir de celle-ci, Fréchet et Halbwachs résolvent de manière astucieuse le problème de l'aiguille de Buffon [3]. Puis ils s'attaquent au problème de l'assurance : ils montrent comment calculer le montant d'une prime pure ou d'une rente viagère [4] à partir des taux de mortalité.

2.1.5 La notion d'écart et les valeurs typiques d'une ensemble de nombres

Ce long chapitre s'ouvre sur une problématique sans lien apparent avec le calcul des probabilités, celle de trouver, étant donnée une série de nombres $y_1, y_2, \dots, y_N$, un nombre w qui la résume. La valeur typique est un nombre qui, dans un certain sens, doit rendre petit les écarts entre w et la série de nombres, à savoir $|y_1 - w|, |y_2 - w|, \dots, |y_N - w|$. Si l'on cherche à minimiser l'écart le plus grand, on se retrouve à prendre pour w la valeur centrale, c'est-à-dire la moyenne entre la plus petite et la plus grande valeur de la série. Ce choix n'est pas très satisfaisant pour Fréchet et Halbwachs, puisque les valeurs extrêmes d'une série statistique sont souvent anormales. Ils traitent ensuite sur un pied d'égalité les valeurs typiques que sont la médiane et la moyenne, minimisant respectivement l'écart moyen et l'écart quadratique moyen (aujourd'hui l'écart-type) définis respectivement par

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|y_k - w| \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|y_k - w|^2}.$$

Dans les deux cas, ils démontrent le lemme dit de Bienaymé, qui montre que la proportion de nombres dans la série qui s'écarte de w de plus de t fois l'écart moyen (respectivement l'écart quadratique moyen) ne peut dépasser $1/t$ (respectivement $1/t^2$). La médiane et la moyenne

3. Sur un plan sont tracées des droites parallèles séparées d'une distance l, une aiguille de longueur a est lancée au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle coupe l'une des droites ?

4. La prime pure correspond au versement d'une somme S dans le futur si le contractant est encore en vie, et la rente viagère au versement d'un montant annuel R jusqu'à la mort du contractant. Dans les deux cas, il s'agit de déterminer ce que doit verser le contractant pour s'assurer de tels revenus futurs.

sont vues comme des économies de la pensée, qui permettent d'embrasser en une seule valeur toute une série de nombres. Fréchet et Halbwachs les utilisent par exemple pour étudier la dépendance entre le nombre d'enfants d'une fille en fonction du nombre d'enfants de sa mère. Une fois le nombre d'enfants de la mère fixée, ses filles n'ont pas toutes eu le même nombre d'enfants, prendre la médiane du nombre d'enfants des filles permet cependant de faire comme si c'était le cas. Les avantages respectifs de la médiane et la moyenne sont discutés, mais l'une n'est jamais considérée comme étant intrinsèquement supérieure à l'autre. L'homme moyen de Quetelet est évoqué, mais Fréchet et Halbwachs se contentent de dire que prendre un homme médian conduirait à un individu typique probablement moins difforme que celui de Quetelet. Enfin, des procédures de calcul pour calculer rapidement médiane et moyenne sont fournies.

Fréchet et Halbwachs s'intéressent ensuite au cas des nombres aléatoires (c'est-à-dire des variables aléatoires) qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, et pour lesquels les notions de médiane (appelée alors valeur probable) et de moyenne se définissent à partir du cas fini. L'écart moyen et quadratique moyen sont aussi définis par la même extension, et le lemme de Bienaymé est toujours valable. Ils définissent ensuite la somme et le produit de nombres aléatoires, montrent que la valeur moyenne d'un produit de nombres aléatoires indépendants est égale au produit des valeurs moyennes de ces nombres, et, à partir de là, que le carré de l'écart quadratique moyen de la somme de nombres aléatoires indépendants est égal à la somme des carrés des écarts quadratiques moyens de chacun des nombres de la somme. À partir de ces identités, ils peuvent montrer que, si des nombres aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ sont des répétitions indépendantes d'un même nombre aléatoire X, le nombre aléatoire

$$v_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

est une bien meilleure approximation de la moyenne de X que X, et que le carré de l'écart quadratique moyen de X peut être approché par

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (X_k - v_N)^2.$$

Une fois ces considérations générales faites, Fréchet et Halbwachs s'intéressent au cas particulier où l'on effectue n épreuves, chacune pouvant donner lieu à l'arrivée d'un événement E de probabilité p. Le nombre de réalisations de E parmi ces n épreuves est égal à la somme de n nombres aléatoires indépendants, chacun prenant la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1 - p$. À partir des résultats précédents concernant les sommes de nombres aléatoires indépendants, il est possible de voir que la valeur moyenne de la fréquence de réalisation de E vaut p et que l'écart quadratique moyen vaut

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Ce résultat, combiné au lemme de Bienaymé, permet de montrer que la probabilité pour que la fréquence de réalisation de E soit proche de p est très proche de 1 pour peu que n soit assez grand : c'est le théorème de Bernoulli.

Dans la discussion qui suit cette démonstration, Fréchet et Halbwachs expliquent le lien entre ce résultat et ce qu'ils ont appelé la loi expérimentale du hasard (la constatation expérimentale faite dans l'introduction). C'est le seul endroit du livre où ils envisagent que l'on puisse relaxer la définition de la probabilité qu'ils donnent dans l'introduction : si l'on suppose seulement qu'un événement de probabilité faible se produit rarement, alors grâce au théorème de Bernoulli, on peut voir que la fréquence de réalisation d'un événement dans un grand groupe d'épreuves sera proche de sa probabilité. Si l'on suppose qu'il existe un lien entre probabilité et réalité empirique seulement dans le cas des petites probabilités, le théorème de Bernoulli autorise à étendre ce lien aux probabilités qui ne sont pas forcément petites mais pour des épreuves répétées un grand nombre de fois.

2.1.6 Épreuves répétées

Ce n'est que vers la fin du livre, dans ce court chapitre, que Fréchet et Halbwachs introduisent la loi du nombre de réalisations d'un événement E se produisant avec probabilité p lorsqu'on effectue n essais pouvant amener à sa réalisation, c'est-à-dire la loi binomiale de paramètres n et p. La probabilité d'obtenir r réalisations parmi ces n essais est notée $\varpi_r^{(n)}$. Une fois l'expression explicite des $\varpi_r^{(n)}$ obtenue, à savoir

$$\varpi_r^{(n)} = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r},$$

Fréchet et Halbwachs étudient le sens de variation avec r de $\varpi_r^{(n)}$, montrent que la valeur la plus probable est la partie entière de $(n+1)p$, et que la décroissance autour de cette valeur la plus probable a lieu plus vite que toute suite géométrique pour peu que n soit assez grand. Mais ils signalent bien que de toute façon, lorsque n est assez grand, le calcul de $\varpi_r^{(n)}$ est en pratique beaucoup trop long. Et ils signalent aussi que les formules sont valables seulement si les événements sont deux à deux indépendants : le contre-exemple qu'ils avancent est celui où les épreuves sont des tirages de cartes d'un paquet sans qu'il n'y ait remise entre deux tirages.

2.1.7 Loi des grands nombres

Dans ce long chapitre, Fréchet et Halbwachs introduisent la loi de Laplace (c'est-à-dire la loi normale centrée réduite) comme étant la limite des $\varpi_r^{(n)}$ lorsque n tend vers l'infini, après avoir expliqué comment changer les échelles des axes pour que la limite ait un sens. L'existence et la forme de la limite sont avancées sans démonstration. Néanmoins, pour justifier leurs propos, ils introduisent une vérification expérimentale : ils prennent l'exemple où l'on dispose de N

groupes de n épreuves chacun. C'est comme si l'on avait N réalisations d'une loi binomiale, et ainsi l'on peut approcher empiriquement la loi binomiale. Mais pour cela, il faut à la fois que n soit grand (pour que la loi binomiale soit proche de la loi normale) ainsi que N (pour que l'on puisse obtenir de manière satisfaisante les fréquences d'occurrence des fréquences des réalisations dans un groupe de n épreuves), et cela nécessite donc la réalisation d'un nombre Nn d'épreuves considérable. C'est pourquoi Fréchet et Halbwachs introduisent la probabilité pour que le nombre de répétitions de l'événement soit compris entre deux limites données. Lorsque n est suffisamment grand, cette probabilité peut être approchée à l'aide de la « courbe en ogive », nom qui désigne la fonction de répartition de la loi normale. La vérification expérimentale, qui se fait de façon graphique en traçant la fonction de répartition empirique à l'aide de N groupes de n épreuves chacun, et en la comparant avec la fonction de répartition de la loi normale, fonctionne bien mieux. Ils estiment ensuite à quel point, selon la loi de Laplace, la probabilité d'avoir des valeurs qui s'écartent de la moyenne diminue vite au fur et à mesure que la taille de l'écart augmente. Puis, Fréchet et Halbwachs montrent un autre cas limite des $\varpi_r^{(n)}$, celui où l'espérance $R = np$ est très petite devant n, et que n est lui-même très grand. Dans ce cas, c'est la loi de Poisson qui est obtenue, et un exemple expérimental vient montrer son utilité.

Fréchet et Halbwachs introduisent ensuite le cas de Poisson, où les probabilités varient d'une épreuve à une autre : plus précisément, on effectue N groupes de n épreuves chacun, et dans chaque groupe, le premier événement se réalise avec probabilité p_1, le deuxième p_2, ..., jusqu'au n-ième qui se réalise avec la probabilité p_n. Ces probabilités ne varient par contre pas d'un groupe à l'autre. Ils montrent alors que la fréquence de succès parmi les n épreuves se groupe autour de

$$V = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k,$$

et, de manière analogue au théorème de Bernoulli, que la probabilité pour que la fréquence, sur les n épreuves, s'écarte trop de V, est très proche de 0 si n est assez grand. Néanmoins, ce qui distingue le cas de Poisson du cas précédent (dit de Bernoulli), est que l'écart quadratique moyen est plus petit que dans le cas où toutes les probabilités sont identiques ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n$). Ils montrent que pour ce qui est de la loi limite, une fois correctement renormalisée, on retrouve la loi de Laplace. Le seul moyen de distinguer les cas de Poisson et Bernoulli est par comparaison entre l'écart quadratique moyen empiriquement mesuré (à l'aide des N groupes d'épreuves) et l'écart moyen obtenu par la formule dans le cas de Bernoulli, à savoir

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Cette comparaison se fait à l'aide du coefficient de divergence de Lexis, qui se définit comme suit :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(f_k - f_0)^2}}{\sqrt{\frac{f_0(1-f_0)}{N}}},$$

où f_0 est la moyenne des fréquences $f_1, f_2, \ldots, f_N$. Si ce coefficient est égal à 1, on se trouve dans le cas de Bernoulli (probabilité constante), s'il est inférieur à 1, c'est le cas de Poisson. Or, $Q \simeq 1$ pour ce qui est du rapport filles/garçons dans les naissances, mais pour les mariages ou d'autres statistiques morales il est bien supérieur à 1.

Pour expliquer ce fait, Fréchet et Halbwachs proposent le modèle de Lexis. Il est toujours question de N groupes de n épreuves chacun. Mais, dans les épreuves d'un même groupe, les probabilités de réalisation des événements sont constantes d'une épreuve à l'autre, tandis qu'elles changent d'un groupe à l'autre. Les auteurs se contentent de montrer que dans ce cas, le coefficient de divergence de Lexis est en effet supérieur à 1.

Le modèle de Lexis permet certes d'expliquer les séries hypernormales (celles pour lesquelles Q est supérieur à 1), mais il y a d'autres manières de le faire : par exemple, un même facteur extérieur peut influencer l'occurrence de plusieurs événements. Ainsi, Fréchet et Halbwachs reprennent pour l'étude de la mortalité le modèle de Borel, dans lequel un événement de probabilité p correspond non pas à la mort d'un seul individu, mais d'un groupe de D individus. Un choix judicieux de D permet alors d'expliquer les séries hypernormales : avec ce modèle, l'espérance du nombre de morts reste le même tandis que l'écart quadratique moyen est multiplié par $\sqrt{D} \geqslant 1$ par rapport au cas de Bernoulli. Un autre modèle de Borel discuté est celui des naissances doubles : il s'agit d'expliquer les différentes répartitions filles/garçons lors de la naissance de jumeaux. Borel montre comment une procédure de tirage de boules dans une urne, judicieusement choisie, permet de reproduire la répartition empiriquement constatée.

Enfin, Fréchet et Halbwachs montrent comment, à l'aide des résultats qui précèdent et notamment la distribution limite de Laplace, il est possible de juger si des résultats expérimentaux peuvent raisonnablement avoir été obtenus par hasard, ou s'il est nécessaire d'avancer une autre explication.

2.2 Des pistes de lecture transversales

Insérons ici quelques remarques sur *Le calcul des probabilités à la portée de tous* que nous ne pouvions pas inclure dans le résumé ci-dessus, que ce soit parce qu'elles concernent la structure générale du livre, ou parce qu'elles auraient trop ralenti la lecture.

2.2.1 Une interprétation fréquentiste

Ce qui frappe, à la lecture du livre, est la signification que Fréchet et Halbwachs donnent à la probabilité, signification qu'ils arrivent à maintenir tout le long de l'ouvrage. Cette signification est définie dès l'introduction : de manière analogue à une grandeur physique, la probabilité est un nombre dont on peut obtenir une approximation à travers l'observation de certains faits empiriques. Cette définition contraste avec les ouvrages de Bertrand (1889), Poincaré (1896) ou encore Borel (1909) qui n'en donnent jamais une aussi claire et dépourvue d'ambiguïté [5] que celle de Fréchet et Halbwachs. Les auteurs justifient cette définition par des motivations pédagogiques :

> Mais, *cherchant un mode d'exposition bien adapté à notre objet*, comme nous nous proposions d'utiliser les théorèmes généraux comme autant de règles de calcul numérique en vue de la prévision d'événements futurs, *nous avons convenu de considérer la probabilité comme une notion purement expérimentale*, la notion d'une constante physique dont la mesure approchée s'obtient par l'observation positive de la fréquence d'un fait. [6]

En effet, puisque le calcul des probabilités a vocation à s'appliquer sur des exemples statistiques, les auteurs ont choisi la définition de la probabilité qui s'adapte le mieux à cet usage. Dans l'idée de « désaxiomatisation » de la science mathématique prêchée par Fréchet (cf. section 1.3.2), les auteurs précisent bien que les mathématiques sont ici mises au service d'un but pratique, ou du moins que ce format est plus efficace du point de vue pédagogique :

> Nous considérons la théorie des probabilités comme une science positive, où les mathématiques (du moins la partie élémentaire des mathématiques) interviennent, il est vrai, à chaque instant, mais qui doit prendre son point de départ dans un certain nombre de notions de fait, tirées de l'expérience, et qui ne valent que dans la mesure où elles correspondent à des réalités. *Du moins il nous paraît y avoir avantage à présenter ainsi les notions et les développements qui s'y rattachent.* [7]

Ce projet est un succès dans le sens où cette définition fréquentiste est tenue tout au long de l'ouvrage : les « probabilités des causes » obtenues à l'aide de la formule de Bayes sont lues par le prisme de cette définition ; l'espérance est d'abord définie de façon concrète avant que la formule la liant à la probabilité (définie de façon empirique) soit établie ; et le théorème de Bernoulli puis les lois limites (de Laplace par exemple) sont illustrés par des exemples (issus des jeux de hasard) où la probabilité d'un événement est approximée par la fréquence de réalisation de cet événement dans un grand nombre d'épreuves. C'est seulement dans la discussion qui suit la démonstration du théorème de Bernoulli (p. 178–182) que la définition donnée dans l'introduction est questionnée : les auteurs identifient de manière plus générale ce qui est nécessaire

5. Il n'y a qu'à lire les premières lignes du traité de Bertrand : « Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ? En repoussant cette définition, je n'en proposerai aucune autre. », [Bertrand, 1907, p. vi].

6. [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. IX-X], notre emphase.

7. [Fréchet et Halbwachs, 1924, p. 1-2], notre emphase.

pour qu'une définition de la probabilité posée *a priori* puisse être utilisée en pratique, à savoir ce que Borel appela plus tard la loi unique du hasard. C'est le fait que, en pratique, les événements de probabilité très faible (mais néanmoins non nulle) ne doivent pas se produire. C'est pour l'illustrer que Borel introduit le miracle des singes dactylographiques, qui, tapant au hasard sur des machines à écrire, reconstitueraient la Bibliothèque nationale : c'est un événement qui peut arriver de manière logique, mais qui possède une probabilité tellement faible qu'il ne se produira pas en pratique. Grâce à ce principe, le calcul des probabilités peut conduire à des conclusions (des probabilités très faibles) qui ont une portée concrète (des événements qui ne se produiront pas à coup sûr). À noter que la loi unique du hasard n'est pas exactement la version borélienne du principe de Cournot, comme cela est expliqué dans [Martin, 1994]. Pour Cournot, ce sont les événements dont la probabilité est infiniment petite qui sont physiquement impossibles, mais l'infinie petitesse est à entendre dans un sens purement mathématique, comme peut l'être la probabilité pour qu'une flèche tirée sur une cible atteigne exactement le centre.

2.2.2 Le rôle des exemples

La caractéristique de ce livre, par rapport à d'autres manuels de calcul des probabilités, est qu'il fourmille d'exemples, dont un certain nombre sont tirés de données statistiques, souvent à propos de l'Alsace-Moselle d'ailleurs. Certains des exemples sont classiques et traités dans la plupart des manuels : l'utilisation des fonctions arbitraires pour le jeu de la roulette (due à Poincaré), l'aiguille de Buffon, ou encore le problème des coffrets pour la probabilité des causes (dû à Bertrand). Pour les vérifications expérimentales du calcul des probabilités sur les jeux de hasard, les résultats sont repris chez d'autres auteurs [8] les ayant faites. Parmi les 77 exemples que nous avons dénombrés, seulement 33 concernent des jeux de hasard. La figure 2.1, qui permet de visualiser la façon dont les exemples sont répartis, laisse apparaître une structure de l'ouvrage en deux parties. En effet, les quatre premiers chapitres, qui renvoient à des notions élémentaires, sont très richement illustrés par des exemples, tandis que les trois derniers chapitres, touchant à des résultats plus élaborés, consacrent plus de temps à des considérations mathématiques et sont donc moins fournis en exemples.

Pour de nombreuses notions probabilistes [9], c'est d'abord un exemple qui est présenté avant que la notion plus générale ne soit introduite par induction à partir de l'exemple particulier. Cette méthode de présentation de nouveaux concepts renvoie à la « désaxiomatisation » de la science mathématique chère à Fréchet (cf. section 1.3.2). Sans compter que chaque chapitre se termine par une série d'exercices, dont la plupart mettent en jeu de véritables données statistiques.

La présence d'exemples numériques permet d'insister sur les méthodes de calcul : l'ordinateur n'existant pas encore, le calcul des différentes valeurs typiques (valeur moyenne, probable,

8. On trouve les noms de Buffon, Charlier, Czuber, Darbyshire, A. Fisher, Lazzerini, Quetelet, Reina, Weldon, Westergaard et Wolf.

9. Loi expérimentale du hasard, probabilité totale, probabilité composée, indépendance, généralisation des théorèmes des probabilités totales et composées, théorème de Bayes, espérance mathématique, loi binomiale.

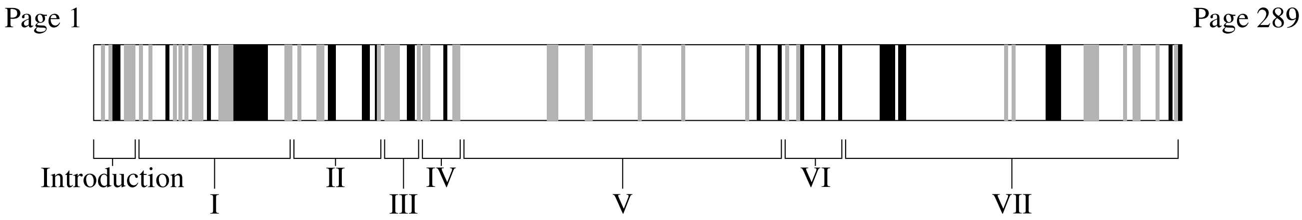

FIGURE 2.1 – Représentation du livre (page 1 tout à gauche et page 289, la dernière, tout à droite, avec en dessous le découpage des chapitres) avec en noir les pages contenant un exemple concernant un jeu de hasard et en gris un exemple issu de données statistiques.

écart moyen, etc.) devait se faire à la main. Entre les pages 136 et 145 est longuement expliqué, sur un exemple issu des jeux de hasard, quels calculs effectuer et dans quel ordre pour obtenir de façon efficace les valeurs typiques. La médiane est d'ailleurs plus facile à calculer à la main que la moyenne, c'est un argument que Fréchet avance en faveur de l'utilisation de la médiane plutôt que de la moyenne.

2.2.3 Démonstrations du théorème de Bernoulli et de la loi des grands nombres de Poisson

La démonstration du théorème de Bernoulli faite par Fréchet et Halbwachs dans le chapitre V étant novatrice, retraçons ici les différentes façons de démontrer le théorème de Bernoulli et la loi des grands nombres de Poisson. Cela nous permettra aussi de clarifier ce que nous entendons par « théorème de Bernoulli » et « loi des grands nombres », puisque cela ne coïncide pas entièrement avec la nomenclature actuelle. Nous nous appuyons principalement sur [Heyde et Seneta, 1977].

Supposons qu'un événement E a une probabilité p fixée de se produire, et que l'on comptabilise, parmi un nombre n d'épreuves pouvant amener à la réalisation de cet événement, la fréquence d'apparition de E. Le théorème de Bernoulli affirme que plus n est grand, plus la fréquence d'apparition de E a de chance d'être proche de p. Sa démonstration, telle que donnée dans les manuels classiques de probabilité en France avant 1924 (on la trouve par exemple dans le *Calcul des probabilités* de Bertrand de 1889, le *Calcul des probabilités* de Poincaré de 1896, ou les *Éléments de la théorie des probabilités* de Borel de 1909), passe par un calcul de la probabilité d'apparition des différentes fréquences (on s'aperçoit que le nombre de réalisations de E suit une loi binomiale), puis par une analyse asymptotique de ces probabilités. Cette analyse asymptotique, menée à l'aide de la formule de Stirling, conduit à la loi limite de Laplace : c'est la démonstration de de Moivre qui date de 1738. Et, à partir de la loi limite, il est possible de montrer que la fréquence de réalisation de E est proche, avec une forte probabilité, de p.

La loi des grands nombres de Poisson, énoncée pour la première fois en 1837 par Siméon Denis Poisson (1781–1840), concerne, elle, le cas où des événements $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ peuvent se réaliser avec des probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ (la probabilité variant d'un événement à l'autre). On peut néanmoins dire, si l'on observe un grand nombre n d'essais de réalisation de ces événements, qu'il est très probable que la fréquence du nombre d'événements réalisés soit très proche de

$$\bar{p}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k,$$

la moyenne des probabilités des différents événements pris individuellement. Ou, dit en termes anachroniques, si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont des variables de Bernoulli indépendantes et dont les probabilités respectives de prendre la valeur 1 sont $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, alors la variable aléatoire

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right) - \bar{p}(n)$$

converge en probabilité vers 0. La démonstration de Poisson passe encore par l'analyse asymptotique de la loi de la somme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, mais, de l'avis de Bertrand, elle manque de rigueur [10].

Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878), en 1853 (l'article est réédité dans [Bienaymé, 1867]), introduit une nouvelle façon de démontrer la loi des grands nombres. Il le fait pour montrer que la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire le fait, pour résumer des données d'observation, de prendre le nombre qui minimise la somme des carrés des écarts aux observations, est très générale et n'a pas besoin de l'hypothèse que les erreurs entachant les données d'observation suivent la loi des erreurs pour s'appliquer. Cette motivation le pousse à s'intéresser à des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ (que l'on peut décomposer en une valeur moyenne et une erreur) dont on cherche à étudier la somme, et plus précisément les écarts de cette somme à sa valeur moyenne (l'erreur totale). Contrairement à ces prédécesseurs, il ne fait pas d'hypothèses particulières sur la loi de $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Ce qu'il fait, plutôt que de chercher à calculer directement la probabilité que l'écart de la somme à sa valeur moyenne soit trop grand, est de calculer l'espérance du carré de cet écart (la variance, donc). Pour ce faire, il montre que la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances de chacune des variables, ce qui s'appelle maintenant l'identité de Bienaymé. Ensuite, il majore la probabilité que l'écart entre une variable aléatoire X et sa valeur moyenne $E(X)$ soit trop grand en établissant l'inégalité

$$P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2},$$

où $\mathrm{Var}(X)$ désigne la variance de X. Cette inégalité est celle qui est maintenant désignée sous le nom d'inégalité de Bienaymé-Chebyshev. La démonstration de Bienaymé comporte donc deux innovations : il calcule la variance, pas directement à l'aide de la loi de probabilité de la somme des erreurs, mais en montrant que la variance d'une somme de variables aléatoires

10. Cf. [Heyde et Seneta, 1977, section 3.3].

indépendantes est égale à la somme des variances [11] ; et il utilise l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev pour majorer la probabilité que l'écart à la valeur moyenne soit grand à partir de la variance. En 1867, Chebyshev publie un article ([Tchébychef, 1867]) dans lequel il systématise le raisonnement de Bienaymé hors du contexte de justification de la méthode des moindres carrés. Chebyshev généralise par la suite l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, en montrant que pour tout $r > 1$,

$$P(|X| \leqslant t) \geqslant 1 - \frac{E(|X|^r)}{t^r}.$$

Il faut signaler ici, contrairement à ce que Fréchet et Halbwachs affirment, qu'en 1867 Chebyshev était au courant de l'article de Bienaymé et n'a donc pas retrouvé l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev de manière indépandante, comme il le reconnaît d'ailleurs dans une lettre publié en 1873. La confusion provient du fait que, dans le *Journal des mathématiques pures et appliquées de Liouville* de 1867, l'article de Bienaymé et celui de Chebyshev sont publiés côte à côte, sans qu'aucune explication du lien entre les deux ne soit donnée, alors que l'article de Bienaymé est une réédition d'un article vieux de 14 ans. Pour plus de détails sur la question de l'attribution de la paternité entre Bienaymé et Chebyshev quant à l'inégalité qui porte leur nom, on pourra consulter [Heyde et Seneta, 1977].

Cette nouvelle manière de procéder peut s'appliquer à la fois au théorème de Bernoulli et à la loi des grands nombres, mais elle ne s'est pas retrouvée dans les manuels français. Dans son traité de probabilité de 1889, Bertrand, après avoir démontré le théorème de Bernoulli à l'aide de l'analyse asymptotique, mentionne des démonstrations « élémentaires » de ce théorème, mais dans lesquelles l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev n'est jamais énoncée explicitement, seule la remarque suivante est faite au cours de l'argumentation :

> Lorsque la valeur probable d'une grandeur tend vers zéro, on n'en peut rien conclure. De grandes valeurs positives peuvent avoir une grande probabilité, aussi bien que les grandes valeurs négatives qui les compensent ; il en est autrement quand la valeur probable d'un carré est très petite. Toutes les valeurs possibles étant de même signe, aucune ne peut à la fois n'être pas très petite et ne pas avoir une probabilité très petite. La probabilité pour que la valeur surpasse un nombre donné tend nécessairement vers zéro. [12]

Selon [Bru, 2006], c'est sans doute parce que Bertrand considère l'inégalité de Bienaymé-Chebysehv comme une proposition trop simple pour être écrite formellement, et que du point de

11. Bienaymé le fait d'ailleurs en passant le calcul des fonctions génératrices et montre plus généralement que si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont des variables indépendantes, de même loi, et de valeur moyenne nulle, alors les moments pairs de la somme $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ se comportent asymptotiquement de la manière suivante :

$$\sqrt[m]{E\left(\sum_{k=1}^{n} |X_k|^{2m}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} CnE\left(|X_1|^2\right).$$

Cela lui permet en particulier de montrer que les moments d'ordre pair ont un comportement asymptotique dicté par $E(|X_1|^2)$, ce qui justifie que toute méthode de minimisation des moments d'ordre pair est asymptotiquement identique aux moindres carrés.

12. [Bertrand, 1907, p. 94].

vue pédagogique, il vaut mieux se reposer sur une propriété dans sa forme intuitive plutôt que de stériliser la réflexion en la formalisant trop. De plus, concernant la loi des grands nombres de Poisson, Bertrand se contente de dire sèchement qu'elle manque « non seulement de rigueur, mais de précision »[13]. Les traités qui suivirent perpétuèrent cet oubli en ne mentionnant ni cette démonstration de Bienaymé, ni la loi des grands nombres de Poisson. De sorte que l'ouvrage de Fréchet et Halbawchs est le premier, parmi les manuels français, à faire reposer sa démonstration du théorème de Bernoulli non pas sur l'analyse asymptotique (le livre aurait alors cessé d'être « à la portée de tous »), mais sur le calcul des variances et l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev. Il est d'ailleurs notable, et ce n'était pas le cas auparavant, que dans *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, la formule de la loi binomiale soit introduite après la démonstration du théorème de Bernoulli.

13. [Bertrand, 1907, p. 90].

Conclusion

Le calcul des probabilités à la portée de tous est un ouvrage singulier, dont la portée dépasse le simple exposé d'une théorie mathématique. Fruit de la collaboration transdisciplinaire inédite entre deux personnalités de premier plan, le mathématicien Maurice Fréchet et le philosophe Maurice Halbwachs, son écriture dans les années 20 à Strasbourg l'a été dans une université qui autorisait, voire encourageait de tels travaux transgressant les frontières disciplinaires.

Quand on s'intéresse au contexte à une plus grande échelle, on s'aperçoit que ce manuel a été écrit dans une période où la nécessité d'un enseignement au plus grand nombre du raisonnement probabiliste s'imposait, portée notamment par la figure d'Émile Borel. Ce projet s'est très progressivement concrétisé dans l'entre-deux-guerres, et ce n'est qu'après la Seconde Guerre mondiale, avec la création de débouchés pour les étudiants en statistique, que cet enseignement s'est massifié. Le livre a donc été écrit au moment d'une période charnière en France, lorsqu'une réflexion sur l'enseignement du calcul des probabilités et de la statistique était réellement engagée. Cette période charnière coïncide aussi avec la redéfinition du rôle de la statistique, celle-ci s'imposant comme un langage privilégié de la science et le calcul des probabilités comme son fondement.

Le livre a été écrit à l'université de Strasbourg, alors qu'elle venait d'être reprise à l'Allemagne. Les deux auteurs, Fréchet et Halbwachs, y ont été envoyés dans le but de promouvoir la culture française et de faire de l'université de Strasbourg la vitrine de la science française. L'université a ainsi reçu de nombreux moyens, à la fois humains et financiers, et l'atmosphère qui y régnait a favorisé les collaborations et les initiatives transdisciplinaires comme celle qui a conduit à l'écriture du *Calcul des probabilités à la portée de tous*.

Ce livre est en effet l'œuvre de deux auteurs issus de disciplines différentes, chacun concerné par des problématiques qui lui sont propres. Pour Fréchet, l'enjeu est avant tout de proposer une méthode d'enseignement qui passe par l'utilisation des exemples, qui ne soit pas seulement axiomatique et déductive. Au niveau du contenu, Fréchet veut insister sur la part d'arbitraire que contiennent les méthodes statistiques, part d'arbitraire qui ne peut être connue qu'en étudiant les démonstrations justifiant ces méthodes. Quant à Halbwachs, il veut définir le rôle et la portée de l'outil statistique en sociologie. S'il est conscient que la statistique est indispensable pour saisir le fait social, il pense que le calcul des probabilités, qui repose sur le concept d'indépendance, ne peut pas s'appliquer dans les cas où il y a une cause sociale.

Le résultat est un livre qui s'emploie à être élémentaire et qui y réussit, puisqu'avec des mathématiques qui ne dépassent pas la manipulation des fractions, de nombreux résultats probabilistes sont abordés et pour la plupart démontrés. L'analyse des séries hyponormales et hypernormales dans le dernier chapitre, à l'aide d'ailleurs d'exemples tirés de statistiques réelles, montre le niveau de subtilité atteint par l'ouvrage. L'organisation elle-même du livre est déjà originale, puisque, par exemple, l'analyse de loi binomiale n'est faite que tardivement et ne constitue pas un résultat central, au contraire des manuels qui le précédèrent. Redisons-le : le matériel présenté dans l'ouvrage fait preuve d'une véritable originalité.

Témoin d'une mise en place de la mathématisation de la statistique, ouvrage transdisciplinaire saisissant les enjeux de l'application de la statistique aux sciences sociales, manuel très pédagogique adoptant une présentation originale du sujet qu'il traite, *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, bien qu'écrit en 1924, reste une œuvre dont la modernité surprend à plus d'un titre et dont la lecture reste très éducative aujourd'hui.

Annexe A

Retranscription de la lettre de Fréchet à l'Académie des sciences

Retranscription d'un feuillet annexé à une lettre envoyé par Maurice Fréchet à l'Académie des sciences, datée du 19 décembre 1924, dans laquelle il se porte candidat pour le prix Montyon de statistique. Ce feuillet est conservé aux archives de l'Académie des sciences, dans la pochette concernant le prix Montyon 1925.

Analyse succinte de l'ouvrage « Le Calcul des Probabilités à la portée de tous », par Fréchet et Halbwachs chez Dunod, 1924

L'attention de l'Académie est attirée :

d'une part sur la <u>présentation</u> sous une forme <u>élémentaire</u> nouvelle des principes généraux du Calcul des Probabilités et de ses application les plus récentes.

d'autre part sur un certain nombre de remarques nouvelles soit au point de vue <u>philosophique</u> soit au point de vue <u>mathématique</u> et dont les principales sont signalées ci après :

1^o *En ce qui concerne l'exposition, la méthode suivie est originale en ce qu'elle ne suppose aucune connaissance de l'Analyse combinatoire ni du Calcul Différentiel ou Intégral.*

Les auteurs n'ont fait appel qu'aux connaissances ordinaires des bacheliers et encore seulement à quelques unes d'entre elles et le plus tard possible. C'est ainsi que la formule des combinaisons $C_n^p = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$ *n'est ni admise, ni démontrée abstraitement, mais obtenue comme application des principes généraux des probabilités à l'occasion d'un exercice, pages 41–42. Les auteurs espèrent ainsi contribuer à la diffusion du Calcul des Probabilités dans un cercle bien plus étendu que celui des mathématiciens, dans celui précisément des personnes à qui cette théorie est indispensable ou utile (économistes, biologistes, statisticiens, etc.)*

2^o *Nous signalons particulièrement les passages suivants où nous croyons avoir présenté des vues nouvelles ou précisé ou amélioré certaines conceptions philosophiques ou simplifié quelques formules ou quelques développements mathématiques :*

Page 9 : analogie entre la fréquence et la mesure expérimentale d'une grandeur physique qui serait dans ce cas la probabilité
Page 11 : critique de la définition ordinaire de la probabilité
Page 12 : critique de l'hypothèse ordinaire de l'homogénéité des probabilités continues.
Page 68 : explication du paradoxe de Bertrand
Page 100 : introduction des valeurs typiques en partant de la notion d'écart d'un nombre $\underline{w}$ avec un groupe de nombres $y_1, \ldots, y_n$.
Page 207 : introduction de la loi de Laplace au moyen de considérations graphiques.
Page 210, 226 : graphiques expérimentaux montrant, 1^o combien l'emploi de la courbe en cloche est peu propre à la représentation des phénomènes généralement présentés comme justifiant la loi de Laplace 2^o combien la courbe en ogive se prête mieux à cette justification.
Page 232 : représentation analytique simple et <u>cependant précise</u> de la courbe en ogive par la formule $P = 10^{-\frac{k(k+1)}{2}}$
Page 237 : procédé pratique pour appliquer la loi des petites probabilités sans tables numériques ; et mise en œuvre sur un exemple numérique nouveau.

Pour les auteurs,
M. Fréchet

Bibliographie

[Bul, 1925] (1925). *Bulletin de la faculté des lettres de Strasbourg*, volume 4.

[Dic, 1968] (1968). *Dictionnaire des parlementaires français (1889–1940)*. Presses Universitaires de France.

[Armatte, 1991] ARMATTE, M. (1991). Une discipline dans tous ses états : La statistique à travers ses traités (1800–1914). *Revue de synthèse*, 112(2):161–206.

[Armatte, 2001] ARMATTE, M. (2001). Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public. *Revue d'histoire des mathématiques*, 7(1):5–63.

[Armatte, 2005] ARMATTE, M. (2005). Lucien March (1859-1933), une statistique mathématique sans probabilité ? *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 1(1).

[Armatte, 2006] ARMATTE, M. (2006). Les images de la Statistique à travers ses traités. 2(2).

[Armatte, 2010] ARMATTE, M. (2010). Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique. *Statistique et enseignement*, 1(2):23–47.

[Barberousse, 2008] BARBEROUSSE, A. (2008). La valeur de la connaissance approchée. L'épistémologie de l'approximation d'Émile Borel. *Revue d'histoire des mathématiques*, 14(1):53–75.

[Barbut *et al.*, 2004] BARBUT, M., LOCKER, B. et MAZLIAK, L. (2004). *Paul Lévy-Maurice Fréchet : 50 ans de correspondance mathématique*. Hermann.

[Becker, 2003] BECKER, A. (2003). *Maurice Halbwachs. Un intellectuel en guerres mondiales 1914–1945*. Agnès Viénot.

[Berr, 1921] BERR, H. (1921). L'esprit de synthèse dans l'enseignement supérieur – I L'université de Strasbourg. *Revue de synthèse historique*, 32:1–13.

[Bertrand, 1907] BERTRAND, J. (1907). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars.

[Bühl, 1924] BÜHL, A. (1924). Le calcul des probabilités à la portée de tous. *L'enseignement mathématique*, 24:163–164. Recension de [Fréchet et Halbwachs, 1924].

[Bienaymé, 1867] BIENAYMÉ, I.-J. (1867). Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Jospeh Liouville*, 12:158–176. Extrait des *Comptes rendus des scéances de l'Académie*, t. XXXVII, séance du 29 août 1853.

[Boll, 1929] BOLL, M. (1929). Le calcul des probabilités et les moyens de le répandre. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 40:357–360.

[Borel, 1914] BOREL, É. (1914). *Le Hasard*. Félix Alcan.

[Borel, 1920] BOREL, É. (1920). La statistique et l'organisation de la présidence du conseil des ministres. *Journal de la société de statistique de Paris*, 61:9–13.

[Brian, 1991] BRIAN, É. (1991). Le prix Montyon de statistique à l'Académie royale des sciences pendant la Restauration. *Revue de synthèse*, 112(2):207–236.

[Brian, 2012] BRIAN, É. (2012). Où en est la Sociologie Générale ? *Revue de synthèse*, 133(1): 47–74.

[Brian et Jaisson, 2005] BRIAN, É. et JAISSON, M. (2005). Nombre et mémoire. Halbwachs sociologue probabiliste. *In* KRAPOTH, H. et LABORDE, D., éditeurs : *Erinnerung und Gesellschaft. Mémoire et société*, pages 127–151. Jahrbuch für Soziologiegeschichte.

[Bru, 1996] BRU, B. (1996). Problème de l'efficacité du tir à l'école d'artillerie de Metz. Aspects théoriques et expérimentaux. *Mathématiques et sciences humaines*, 136:29–42.

[Bru, 2005] BRU, B. (2005). Poisson, probability calculus, and public education. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 1(2).

[Bru, 2006] BRU, B. (2006). Les leçons du calcul des probabilités de Joseph Bertrand. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 2(2).

[Bru *et al.*, 2012] BRU, M.-F., BRU, B. et EID, S. (2012). Une introduction à la *Théorie analytique*. Hermann Laurent (1873). *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 8(1).

[Bunle, 2005] BUNLE, H. (2005). Extrait de l'interview de Henri Bunle (1884-1986) par Alain Desrosières le 29 mai 1982. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 1(1).

[Bustamante *et al.*, 2015] BUSTAMANTE, M.-C., CLÉRY, M. et MAZLIAK, L. (2015). Le Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921-1939). *North-W. Eur. J. of Math.*, 1:85–123.

[Catellier et Mazliak, 2012] CATELLIER, R. et MAZLIAK, L. (2012). The emergence of French probabilistic statistics. Borel and the Institut Henri Poincaré around the 1920s. *Revue d'histoire des mathématiques*, 18(2):271–335.

[Cavaillès, 1940] CAVAILLÈS, J. (1940). Du collectif au pari : A propos de quelques théories récentes sur les probabilités. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 47(2):139–163.

[Cléro, 2006] CLÉRO, J.-P. (2006). Probabilités, théorie des jeux et affectivité. *In Cahiers critiques de philosophie (no 3) : Philosophie et mathématique*, pages 55–77. Hermann.

[Coumet, 1970] COUMET, E. (1970). La théorie du hasard est-elle née par hasard ? *In Annales. Histoire, Sciences Sociales*, volume 25, pages 574–598.

[Craig, 1979] CRAIG, J. E. (1979). Maurice Halbwachs à Strasbourg. *Revue française de sociologie*, pages 273–292.

[De Finetti, 1937] DE FINETTI, B. (1937). La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *In Annales de l'institut Henri Poincaré*, volume 7, pages 1–68.

[Deltheil, 1924] DELTHEIL, R. (1924). Le calcul des probabilités à la portée de tous. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 17–18:518. Recension de [Fréchet et Halbwachs, 1924].

[Deltheil, 1931] DELTHEIL, R. (1931). L'évolution du calcul des probabilités depuis un quart de siècle. *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 9:301–311.

[Denis, 2004] DENIS, D. J. (2004). The modern hypothesis testing hybrid : R.A. Fisher's fading influence. *Journal de la société française de statistique*, 145(4):5–26.

[Desrosières, 1993] DESROSIÈRES, A. (1993). *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*. Paris, La Découverte.

[Desrosières, 2001] DESROSIÈRES, A. (2001). How Real Are Statistics ? Four Posssible Attitudes. *Social Research*, pages 339–355.

[Desrosières, 2010] DESROSIÈRES, A. (2010). Un enseignement sur l'histoire de la statistique et de l'économétrie pour les élèves de l'ENSAE. *Statistique et Enseignement*, 1(1):21–33.

[Durand et Mazliak, 2011] DURAND, A. et MAZLIAK, L. (2011). Volterra's Prolusione as a source for Borel's interest in probability. *Centaurus*, 53:306–332.

[Égré et Barberousse, 2014] ÉGRÉ, P. et BARBEROUSSE, A. (2014). Borel on the heap. *Erkenntnis*, 79(5):1043–1079.

[Fehr, 1950] FEHR, H. (1942–1950). A. Bühl 1878–1949. *L'enseignement mathématique*, 39:6–8.

[Fréchet, 1955a] FRÉCHET, M. (1955a). *Les mathématiques et le concret*, chapitre Biographie du mathématicien alsacien Arbogast, pages 337–362. Presses universitaires de France. Extrait d'une leçon inaugurale à l'Université de Strasbourg, publiée dans la *Revue du mois* en 1920.

[Fréchet, 1955b] FRÉCHET, M. (1955b). *Les mathématiques et le concret*, chapitre Sur une désaxiomatisation de la science, pages 1–10. Presses universitaires de France. Tiré d'une conférence faite à Berne en 1955.

[Fréchet, 1955c] FRÉCHET, M. (1955c). *Les mathématiques et le concret*, chapitre La statistique mathématique : ses buts, ses applications et son enseignement, pages 273–290. Presses universitaires de France. Texte de la conférence d'ouverture du cycle de cours sur la Statistique et ses applications par la Faculté des Sciences de Madrid, en janvier 1949.

[Fréchet, 1955d] FRÉCHET, M. (1955d). *Les mathématiques et le concret*, chapitre Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen, pages 317–341. Presses universitaires de France. Reproduit une des brochures, parue sous le même titre, en 1949, de la collection ≪ Les conférences du Palais de la Découverte ≫.

[Fréchet et Halbwachs, 1924] FRÉCHET, M. et HALBWACHS, M. (1924). *Le calcul des probabilités à la portée de tous*. Dunod.

[Galifret, 1989] GALIFRET, Y. (1989). Piéron, instaurateur de la psychologie en France. *L'Année psychologique*, 89(2):199–212.

[Gattuso, 2011] GATTUSO, L. (2011). L'enseignement de la statistique : où, quand, comment, pourquoi pas ? *Statistique et Enseignement*, 2(1):5–30.

[Guerraggio *et al.*, 2016] GUERRAGGIO, A., JAËCK, F. et MAZLIAK, L. (2016). Lines on the Horizon : Hadamard and Fréchet, readers of Volterra. *In* BRECHENMACHER, F., JOUVE, G., MAZLIAK, L. et TAZZIOLI, R., éditeurs : *Images of Italian mathematics in France. The Latin Sisters from Risorgimento to Fascism*. Springer.

[Guldberg, 1933] GULDBERG, A. (1933). Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques. *In Annales de l'institut Henri Poincaré*, volume 3, pages 229–278.

[Halbwachs, 1907] HALBWACHS, M. (1907). *Leibniz*. Paul Delapane.

[Halbwachs, 1923] HALBWACHS, M. (1923). L'expérimentation statistique et les probabilités. *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 96:340–371.

[Halbwachs, 1936] HALBWACHS, M. (1936). La méthodologie de François Simiand. Un empiriste rationaliste. *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 121:281–319.

[Halbwachs, 1931] HALBWACHS, M. (2005 [1931]). La statistique et les sciences sociales en France. *In* JAISSON, M. et BRIAN, E., éditeurs : *Le point de vue du nombre*, pages 369–380. INED. Publié pour la première en 1931, probablement issu d'un manuscrit d'un cours donné à l'université de Strasbourg.

[Halbwachs, 1913] HALBWACHS, M. (2010 [1913]). *La théorie de l'homme moyen. Essai sur Quetelet et la statistique morale*. ScienceS en situation.

[Havlova *et al.*, 2005] HAVLOVA, V., MAZLIAK, L. et SISMA, P. (2005). Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 1(1).

[Heyde et Seneta, 1977] HEYDE, C. C. et SENETA, E. (1977). *I. J. Bienaymé : statistical theory anticipated*. Springer-Verlag.

[Howie, 2004] HOWIE, D. (2004). *Interpreting probability. Controversies and developments in the early twentieth century*. Cambridge University Press.

[Jaisson et Baudelot, 2007] JAISSON, M. et BAUDELOT, C., éditeurs (2007). *Maurice Halbwachs, sociologue retrouvé*. Éditions Rue d'Ulm.

[Lalande, 1925] LALANDE, A. (1925). Philosophy in France, 1924. *The Philosophical Review*, 34(6):533–556.

[Laurent, 1908] LAURENT, H. (1908). *Statistique mathématique*. Doin.

[Lauritzen, 2002] LAURITZEN, S. L. (2002). *Thiele : pioneer in statistics*. Oxford University Press.

[Lurquin, 1932] LURQUIN, C. (1932). Note historico-critique sur un critérium élémentaire de probabilité. *In Compte-rendu de la 56e session, Bruxelles, Association française pour l'avancement des sciences*, pages 66–69.

[March, 1910] MARCH, L. (1910). Essai sur un mode d'exposer les principaux éléments de la théorie statistique. *Journal de la société de statistique de Paris.*, 51:447–486.

[Martin, 1999] MARTIN, O. (1999). Raison statistique et raison sociologique chez Maurice Halbwachs. *Revue d'histoire des sciences humaines*, (1):69–101.

[Martin, 1994] MARTIN, T. (1994). La valeur objective du calcul des probabilités selon Cournot. *Mathématiques et Sciences humaines*, 127:5–17.

[Mauss, 1933] MAUSS, M. (1933). *La science française*, volume 1, chapitre La sociologie en France depuis 1914, pages 36–46. Larousse.

[Mazliak, 2010] MAZLIAK, L. (2010). Borel, Fréchet, Darmois : La découverte des statistiques par les probabilistes français. *Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 6(2):24–p.

[Mazliak, 2012] MAZLIAK, L. (2012). La graphologie d'Alfred Binet, terrain d'entraînement d'Emile Borel, statisticien en devenir. *Recherches & éducations*, (6):241–253.

[Mazliak, 2015] MAZLIAK, L. (2015). The ghosts of the Ecole Normale. *Statistical Science*, 30(3):391–412.

[Mazliak et Sage, 2014] MAZLIAK, L. et SAGE, M. (2014). Au-delà des réels : Émile Borel et l'approche probabiliste de la réalité. *Revue d'histoire des sciences*, 67(2):331–357.

[Mespoulet, 2001] MESPOULET, M. (2001). *Statistique et révolution en Russie : un compromis impossible (1880-1930)*. Presses Universitaires de Rennes.

[Meusnier, 2006] MEUSNIER, N. (2006). Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, 2(2).

[Morrisson, 1987] MORRISSON, C. (1987). L'enseignement des statistiques en France du milieu du XIXème siècle à 1960. *Pour une histoire de la statistique*, 2:811–823.

[Piaget, 1966] PIAGET, J. (1966). Henri Piéron : 1881-1964. *The American Journal of Psychology*, 79(1):147–150.

[Piéron, 1924] PIÉRON, H. (1924). Le calcul des probabilités à la portée de tous. *L'année psychologique*, 25:691. Recension de [Fréchet et Halbwachs, 1924].

[Poincaré, 1912] POINCARÉ, H. (1912). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars.

[Pressat, 1987] PRESSAT, R. (1987). L'enseignement de la statistique en France à ses débuts (ca. 1850-1939). *Journal de la Société de statistique de Paris*, 128:18–29.

[Regazzini, 2013] REGAZZINI, E. (2013). The origins of de Finetti's critique of countable additivity. *In Advances in modern statistical theory and applications : a Festschrift in honor of Morris L. Eaton*, pages 63–82. Institute of Mathematical Statistics.

[Schöttler, 2010] SCHÖTTLER, P. (2010). Marcel Boll, physicien-philosophe et critique d'Émile Meyerson. *Corpus – Revue de philosophie*, 58:143–157.

[Siegmund-Schultze, 2005] SIEGMUND-SCHULTZE, R. (2005). Maurice Fréchet à Strasbourg. *In* CRAWFORD, E. et OLFF-NATHAN, J., éditeurs : *La science sous influence. L'université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands. 1872-1945*, pages 185–196. La nuée bleue.

[Stoetzel, 1946] STOETZEL, J. (1946). Sociologie et démographie. *Population (french edition)*, 1(1):79–89.

[Taylor, 1982] TAYLOR, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet : I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, 27(3):233–295.

[Taylor, 1985] TAYLOR, A. E. (1985). A study of Maurice Fréchet : II. Mainly about his work on general topology, 1909–1928. *Archive for History of Exact Sciences*, 34(4):279–380.

[Taylor, 1987] TAYLOR, A. E. (1987). A study of Maurice Fréchet : III. Fréchet as analyst, 1909–1930. *Archive for History of Exact Sciences*, 37(1):25–76.

[Tchébychef, 1867] TCHÉBYCHEF, M. P.-L. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Jospeh Liouville*, 12:177–184. Traduit du russe par M. N. de Khanikof. Extrait du *Recueil des Sciences mathématiques*, t. II.

[Véron et Rohrbasser, 2003] VÉRON, J. et ROHRBASSER, J.-M. (2003). Wilhelm Lexis : la durée normale de la vie comme expression d'une « nature des choses ». *Population*, 58(3): 343–363.

[Von Plato, 1994] VON PLATO, J. (1994). *Creating modern probability*. Cambridge University Press.