Quelques aspects mathématiques du déterminisme

Hugo LAVENANT

12 décembre 2014

Introduction

> « Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux. »

C'est par ces mots que Pierre Simon de LAPLACE exprime sa conviction philosophique déterministe dans son *Essai philosophique sur les probabilités*. Bien qu'il n'ait jamais prétendu qu'une telle intelligence existe [1], les implications philosophiques sont conséquentes. De nombreux auteurs ont d'ailleurs exprimé les limites de cette affirmation : cela supposerait que tout l'univers est soumis aux lois de la physique, que celles ci soit de réelles lois et non des approximations etc.

Le but de ce texte va être de montrer la traduction en termes mathématiques de ce problème, et de discuter de quelques exemples où la projet déterministe est mis en échec à cause des mathématiques. Il permettra à la fois de présenter des questions que les mathématiciens se posent mais aussi de montrer la difficulté qu'il y a à traduire des situations mathématiques non déterministes en situations physiques « réelles ».

1 Le formalisme mathématique du déterminisme

Espace des états et trajectoires Mathématiquement parlant, pour parler de l'évolution déterminée ou non d'un *système physique*, il faut se donner un objet mathématique qui va décrire de façon *univoque*, sans ambiguïtés, le système physique. Cet objet appartiendra à ce qu'on appellera *l'espace des états* du système, qui représente tous les états possibles du système physique. Un élément dans cet espace des états, c'est-à-dire un *état*, caractérise le système que l'on veut étudier et renferme toute l'information nécessaire pour faire les prédictions physiques sur le système.

Prenons l'exemple d'un système mécanique : le point matériel. Cela peut être l'idéalisation d'un objet tel qu'un boulet de canon, un caillou, ou d'une planète. Pour préciser son état de façon univoque, il faut préciser sa position (par rapport à des objets fixes, la donnée de ces objets fixes constituant un *référentiel*) et sa vitesse. L'espace physique possédant trois dimensions, l'état d'un système sera la donnée de 6 nombres, 3 pour caractériser la vitesse et 3 pour caractériser la position. Les figures 1 et 2 montrent un représentation schématique d'un état possible pour des systèmes composés de respectivement un et plusieurs points matériels. Dans le cas d'un système avec plusieurs points matériels (comme le système solaire), alors il faudra spécifier la vitesse et la position de chaque point matériel : on aura besoin de $6 \times n$ nombres réels où n désigne le nombre de points matériels dans le système.

Donnons un autre exemple, celui du mouvement d'un fluide, comme l'écoulement de l'eau autour d'un obstacle. Dans ce cas, pour connaître l'état du fluide, il faut spécifier sa vitesse en tout point. La figure 3 donne un exemple d'une configuration du fluide. On remarque une différence

1. Et c'est précisément parce que nous ne sommes pas cette intelligence que nous avons besoin du calcul des probabilités pour néanmoins prédire les phénomènes physiques : ceci explique pourquoi cette affirmation se trouve dans l'introduction d'un traité sur le calcul des probabilités.

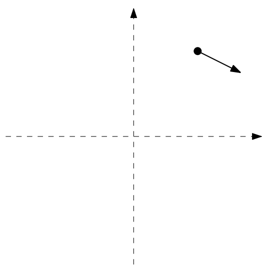

FIGURE 1 – Représentation d'*un* état possible pour un point matériel. Les axes (en pointillés) indiquent le système de référence choisi, la position du point matériel est représentée par un point et sa vitesse par une flèche.

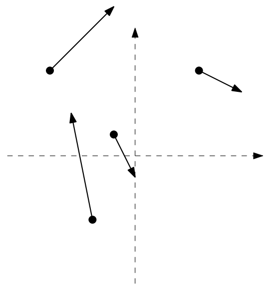

FIGURE 2 – Représentation d'*un* état possible pour système composé de quatre points matériels. Les axes (en pointillés) indiquent le système de référence choisi, la position de chaque point matériel est représentée par un point et sa vitesse par une flèche.

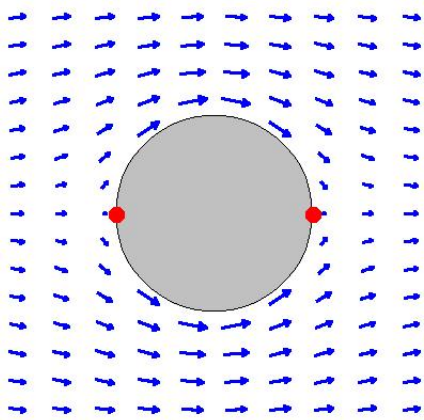

FIGURE 3 – Représentation schématique d'une configuration du fluide : en chaque point, une flèche (en bleu) représente la direction et l'intensité de la vitesse du fluide. Ce fluide est ici en train de contourner un obstacle (en gris).

par rapport à l'exemple précédent, c'est que le nombre de paramètres nécessaires pour décrire le fluide est infini (il en faut trois pour décrire la vitesse en un point, donc une infinité pour décrire la vitesse en tout point), alors qu'il en fallait un nombre fini ($6 \times n$ s'il y a n points matériels différents) précédemment. On dira que l'espace des états du mouvement d'un fluide possède un nombre infini de degrés de liberté alors qu'un système constitué d'un nombre fini de points matériels possède un nombre fini de degré de liberté. Comme on verra ci-dessous, l'analyse des systèmes possédant un nombre infini de degrés de liberté est bien plus complexe.

On en vient ensuite à la notion de *trajectoire* : c'est la donnée pour tout instant de l'état du système à l'instant considéré. Connaître la trajectoire du système, c'est donc spécifier son état à *tout instant*. De même que l'espace des états, c'est un objet mathématique purement descriptif : rien ne nous interdit de considérer *a priori* la trajectoire d'un caillou qui, lancé en l'air ne retomberait jamais, la plausibilité physique d'une telle trajectoire sera discutée ci dessous.

Loi d'évolution Maintenant si on suit la démarche de Laplace il faut spécifier « toutes les forces dont la nature est animée » et les relier au mouvement du système. En effet, la physique relie le mouvement à ses causes, c'est-à-dire les *interactions* qui peuvent exister entre les différentes entités (comme l'attraction mutuelle des planètes entre elles par exemple). Cette relation est traduite en une relation mathématique que doivent vérifier les *trajectoires*, que l'on appellera la *loi d'évolution*. C'est-à-dire que si on se donne une trajectoire quelconque (qui est, rappelons-le, un objet mathématique) alors elle modélise une trajectoire physique si et seulement si elle vérifie une certaine

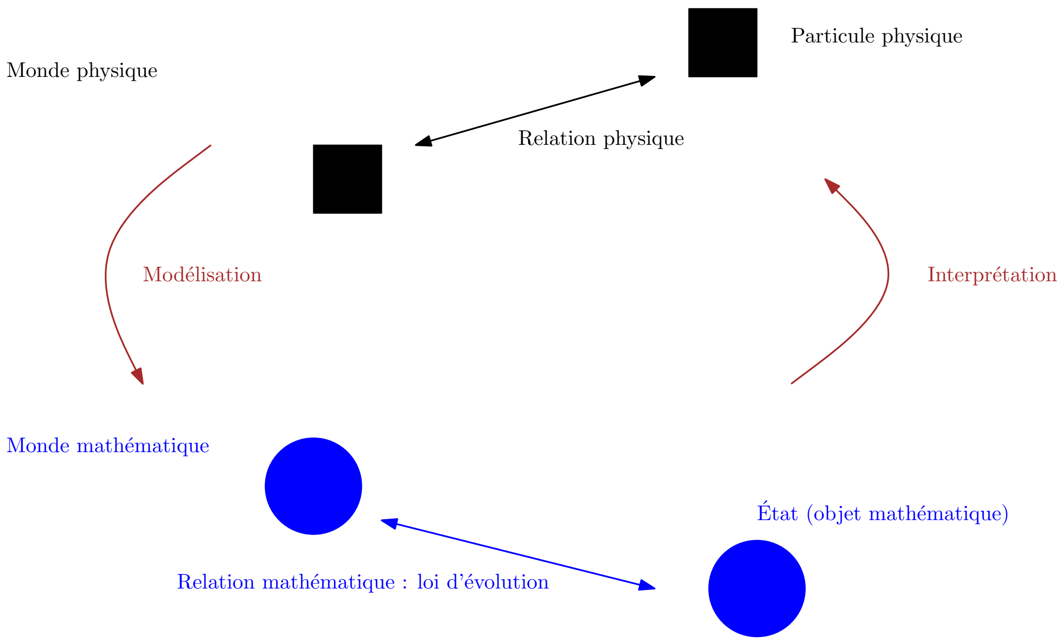

FIGURE 4 – Représentation schématique de la traduction entre le monde physique (en noir) et le monde mathématique (en bleu).

relation mathématique qu'est la loi d'évolution. Si l'on reprend l'exemple du caillou, la trajectoire pour laquelle le caillou ne retombe jamais ne satisfait pas la loi d'évolution[2].

Dans l'idée, la loi d'évolution dit que si on connaît l'état du système à un instant donné alors on sait où se trouve le système à un instant infiniment proche du précédent. Ensuite, de proche en proche on peut espérer savoir où se trouve le système à un instant de plus en plus postérieur à l'instant que l'on s'était donné. Mais dans le monde mathématique rien n'interdit *a priori* que plusieurs trajectoires, voire même aucune satisfassent cette relation mathématique qu'est la loi d'évolution.

On peut résumer ce qu'on a fait jusqu'à présent dans la figure 4 : on a traduit des objets et des relations du « monde physique » dans le « monde mathématique », la traduction du premier vers le deuxième s'appelle la *modélisation* tandis que celle du second vers le premier est l'*interprétation* des résultats mathématiques. Cette traduction n'implique aucune liaison ontologique, on la fait uniquement car elle est pratique.

Problème de Cauchy On en vient alors à la formulation mathématique du problème du déterminisme, que l'on appelle *problème de Cauchy*. On considère un système physique décrit par un espace des états, une loi d'évolution, un état particulier appelé *état initial*, ainsi qu'un temps de référence appelé *instant initial*. Une *solution du problème de Cauchy* est une trajectoire satisfaisant l'équation d'évolution et dont la valeur à l'instant initial est l'état initial que l'on a choisi. La question que l'on se pose est la suivante :

Existe-t-il des solutions au problème de Cauchy ? Si oui, la solution est elle unique ?

En effet, il faut bien comprendre qu'*a priori* la réponse à ces deux questions n'est pas évidente, c'est une réelle question interne aux mathématiques. L'esprit de la loi d'évolution (c'est-à-dire l'idée que l'on peut calculer les états de proche en proche) nous laisse à espérer que la réponse est positive pour les deux questions, mais tout le travail du mathématicien est justement de transformer l'esprit de la loi en démonstration mathématique. Dans le cas où il existe une et une seule solution au problème de Cauchy (c'est-à-dire une et une unique trajectoire partant d'un état donné et satisfaisant la loi d'évolution) le système est dit *déterministe* au sens mathématique[3]. Dans le cas où l'on

2. Pour ceux qui connaissent la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, c'est précisément la loi d'évolution en question : si on se donne une trajectoire quelconque, alors on peut dire si elle satisfait ou non la seconde loi de Newton.

3. Les mathématiciens, rajoutant une autre condition technique, diront que le problème de Cauchy est bien posé au sens de Hadamard

a l'existence de plusieurs solutions, le système n'est pas déterministe : étant donné un état initial, le système peut évoluer de plusieurs manières différentes, donc les lois physiques ne permettent pas de savoir dans quel état il sera à un instant ultérieur.

2 Les réponses mathématiques au problème du déterminisme

La question mathématique associée au déterminisme, c'est-à-dire l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy est un vaste champ de recherche en mathématiques. La réponse prend souvent la forme suivante :

> *Si la l'espace des états et la loi d'évolution satisfont certaines hypothèses techniques, alors le problème de Cauchy admet une et une unique solution.*

Le terme *hypothèse technique* signifie hypothèse de nature mathématique (qu'il n'est pas évident de relier à une intuition « physique ») sur les objets mathématiques que sont l'espace des états et la loi d'évolution ; toute l'habileté des mathématiciens consiste alors à trouver les hypothèses techniques les moins restrictives possibles afin d'englober le plus de modèles différents.

Une différence majeure apparait selon que l'espace des états possède un nombre fini ou infini de degrés de liberté. Dans le premier cas, un résultat général[4] assure l'existence et l'unicité des solutions dans un cadre très large englobant la plupart des modèles mathématiques. Dans le second cas, c'est-à-dire si le système possède un nombre infini de degré de liberté alors chaque problème de Cauchy est différent, est un nouveau défi, et la recherche en mathématique concernant ce type de problème est très active. À titre d'exemple, on sait qu'il existe des solutions aux équations du mouvement des fluides, mais la question de l'unicité est encore un problème ouvert[5].

Faisons remarquer à titre culturel que le mathématicien, en dehors de ces problèmes d'existence et d'unicité des solutions étudie aussi des propriétés plus qualitatives des solutions. Par exemple, dans le cas des lois régissant le mouvement des planètes, on se pose toujours la question de savoir si le système solaire est *stable*, c'est-à-dire si les planètes vont tourner éternellement autour du soleil ou bien si des petits perturbations, amplifiées de plus en plus, vont dérégler cet équilibre.

3 Quelques implications philosophiques

La question de l'*existence* des solutions peut être vue comme une exigence de cohérence de la théorie, c'est-à-dire que la moindre des choses est que certaines trajectoires satisfont la loi d'évolution, puisque cette dernière modélise un phénomène qui se produit *réellement*. C'est par exemple la justification avancée par Jean LERAY dans son article fondant la théorie de l'existence de solutions pour les équations de Navier (c'est la loi d'évolution qui régit le mouvement des fluides) :

> « *La théorie de la viscosité* conduit à admettre que les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier, il est nécessaire de justifier a posteriori cette hypothèse en établissant *le théorème d'existence suivant* : il existe une solution des équations de Navier qui correspond à un état de vitesse donné arbitrairement à l'instant initial. »

Deux exemples de modèles non déterministes Le problème du déterminisme est lié à l'*unicité* des solutions du problème de Cauchy. Dans le cas où l'espace des états ou la loi d'évolution ne satisfont pas les hypothèses technique, on peut trouver des conditions initiales telles que *plusieurs* trajectoires partent d'une même condition initiale et satisfont la loi d'évolution. Dans ce cas, le modèle mathématique ne permet *pas* de prédire le futur, puisqu'il ne peut pas nous apprendre la trajectoire qui sera suivie par le système. Des exemples de systèmes mathématiques non déterministes sont assez simples à construire, mais sont exprimés dans un formalisme mathématique, sans relation *a priori* avec le réel ; les mathématiciens ont ensuite essayé de les traduire comme modélisation d'un « véritable » système physique.

4. Il s'agit du théorème de Cauchy-Lipschitz.
5. Il s'agit de l'un des 7 problèmes du millénaires, considérés comme les plus importants et les plus durs en mathématiques, et dont la résolution est récompensée par le *Clay Institute* par un million de dollars.

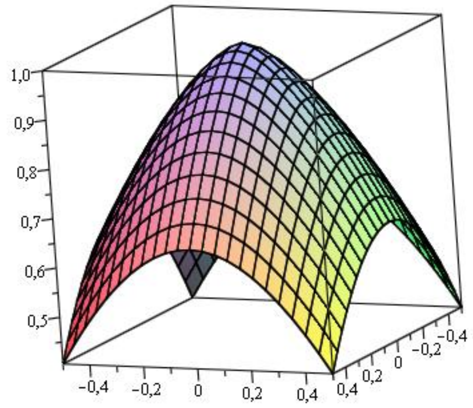

FIGURE 5 – Vue en trois dimensions du dôme acausal de Norton.

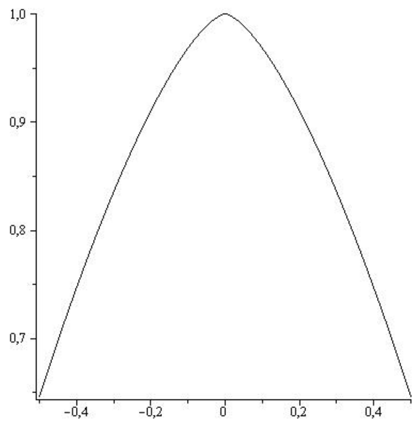

FIGURE 6 – Vue en coupe (selon un rayon) du dôme acausal de Norton.

Nous allons présenter ici l'un de ces exemples, le dôme acausal de Norton, car le système physique correspondant est assez simple : il s'agit d'un dôme, représenté sur les figures 5 et 6, dont la forme [6] est choisie de telle sorte à ce que le système physique résultant donne un modèle mathématique non déterministe, cela est possible car le dôme n'est pas infiniment lisse au sommet. Plus précisément, si on place une bille au repos exactement sur le sommet du dôme, alors elle pourra rester indéfiniment au sommet ou bien quitter le sommet à n'importe quel instant : toute trajectoire correspondant à rester au sommet pendant un temps quelconque puis quitter le sommet en roulant vers le bas est une solution au problème de Cauchy. En clair, le temps auquel la bille va quitter le sommet n'est pas prévisible par la théorie. Il ne s'agit pas d'un problème de précision des appareils de mesure ou du fait que des petites perturbations aléatoires viendraient déloger la bille. L'obstacle est que le modèle mathématique sous-jacent n'est *pas* déterministe.

Présentons un autre exemple de réponse négative au problème de Cauchy, sûrement plus difficile à comprendre. Le problème original vient de la mécanique céleste, on considère un système de cinq [7] planètes (assimilées à des points matériels) s'attirant mutuellement entre elles par la gravitation. Dans ce cas, on peut trouver une configuration initiale [8] telle qu'en *temps fini* une des planètes s'échappe à l'infini : cette planète va se mettre à osciller de plus en plus rapidement et avec une amplitude de plus en plus grande, et le nombre d'oscillations va être infini en un temps fini. C'est-à-dire qu'après un certain temps, la trajectoire résolvant le problème de Cauchy va partir à l'infini et cesser d'exister. Mathématiquement parlant, il n'existe pas de trajectoire définie *pour tout temps* cela ne fait pas sens de parler de l'état du système après ce temps d'explosion où la planète s'échappe à l'infini.

Les limites de la modélisation L'exemple du dôme acausal a bien des limites : par exemple, il est impossible de construire un dôme possédant exactement la forme prescrite (en fait, il est impossible de réaliser physiquement n'importe quelle surface mathématique puisque celle-ci est spécifiée avec une précision infinie), il est impossible de poser la particule *exactement* au sommet etc. De même il est en pratique impossible de trouver un système planétaire dont les conditions initiales sont exactement celles nécessaires pour qu'une planète s'échappe à l'infini en temps fini.

Toute le problème est que les hypothèses *mathématiques* qui sont nécessaires pour assurer le déterminisme sont précisément de nature mathématique : leur nécessité apparaît quand on cherche à *démontrer* l'existence et l'unicité des solutions pour un problème de Cauchy. Par

6. Dans un système de coordonnées cylindrique avec l'axe vertical pointant vers le haut, le dôme a pour équation $z = 1 - r^{\frac{3}{2}}$.

7. Le problème apparaît aussi avec des systèmes comportant plus de cinq planètes ; pour deux ou trois il ne peut arriver et pour quatre cela reste une question ouverte.

8. La configuration initiale n'est pas simple à décrire : entre 1895, où la conjecture qu'une telle configuration existe a été formulée par P. Painlevé et 1987, où Z. Xia en a exhibée une, il s'est écoulé 90 ans.

conséquent, les contres-exemples au déterminisme mathématique qui sont trouvés sont faits pour contredire ces hypothèses mathématiques, et les situations physiques associées sont assez peu naturelles. Cela permet de voir que la connexion (la modélisation et l'interprétation représentées sur la figure 4) entre les objets mathématiques et le monde physique n'est pas si naturelle : en quelque sorte, pour sauver le déterminisme on pourrait dire que ces exemples ne font qu'utiliser des artefacts mathématiques introduits par la modélisation.

Donnons un exemple de l'un de ces « artefacts » : on a dit que dans l'espace des états d'un point matériel, la position est représentée par 3 nombres. Par nombre, on entend un nombre avec une infinité de chiffres après la virgule, c'est-à-dire qui contient une précision infinie. Cela ne représente bien évidemment aucune position physique, mais c'est mathématiquement beaucoup plus pratique et puissant de pouvoir utiliser un formalisme où tout est donné avec une précision infinie [9]. Dans les deux exemples les conditions initiales sont si particulières qu'elles ne souffriraient d'aucun écart dans la série infinie de leurs décimales les définissant : elles sont des artefacts mathématiques et non une réalité physique.

Expliquons pourquoi ces contres-exemples sont un autre sérieux obstacle à l'idée d'un monde entièrement déterminé selon la vue de Laplace. Comme dit plus haut, un déterministe convaincu argumenterait qu'ils ne représentent pas une réelle situation physique et donnerait d'innombrables raisons pour justifier qu'ils ne peuvent réellement se présenter. Sur ce point il aurait entièrement raison. Mais en faisant cela, il admet que le modèle mathématique ne représente pas la réalité physique en tant que telle, que l'effort de traduction entre monde mathématique et monde physique n'est pas immédiate. Donc il reconnaît que la possibilité d'embrasser tout l'univers à travers un unique modèle mathématique n'est pas suffisante puisque les mathématiques ne sont qu'une idéalisation, qu'il faut rajouter des hypothèses physiques supplémentaires afin d'interpréter leurs prédictions. Il reconnaît que les mathématiques n'énoncent pas de vérité transcendantales sur l'état futur de l'univers puisqu'il faut ajouter un « bon sens » physique : en conclusion, il réfute le projet de Laplace de pouvoir prédire l'état futur de l'Univers en connaissant uniquement la loi d'évolution et l'instant initial.

On conclura par un mot de Gaston BACHELARD selon qui nous choisissons les situations physiques de telle manière à ce qu'elles se comportent de manière déterministe :

> « Le véritable ordre de la Nature, c'est l'ordre que nous mettons techniquement dans la Nature. »

Le rôle du mathématicien semble alors de participer à cette mise en ordre puisqu'il indique au physicien quelles sont les conditions techniques nécessaires pour que le modèle mathématique soit déterministe.

Bibliographie

La description du dôme acausal de NORTON a été trouvée dans les articles suivants :

- *The Dome : A Simple Violation of Determinism in Newtonian Mechanics*, John D. NORTON, disponible à l'adresse `http://www.pitt.edu/~jdnorton/Goodies/Dome/`.
- *Norton's Slippery Slope*, David B. MALAMENT, disponible à l'adresse `http://philsci-archive.pitt.edu/3195/1/NortonDome.pdf`.

Celle du système planétaire dont une planète part à l'infini en temps fini est décrite dans le livre suivant :

- *Celestial encounters*, Florin DIACU et Philip HOLMES, Princeton science library.

Enfin les citations sont extraites des ouvrages suivants :

- *Essai philosophique sur les probabilités*, Pierre Simon de LAPLACE.
- *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Jean LERAY, publié dans *Acta Mathematica* en décembre 1934.
- *Le nouvel esprit scientifique*, Gaston BACHELARD.

9. D'une certaine manière, la structure de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est importante pour les hypothèses techniques portant sur l'espace des états.